新物理学選書

# 経路積分と対称性の量子的破れ

Path Integral and Quantum Anomalies

藤川和男 著

Kazuo Fujikawa

岩波書店

# まえがき

本書の主題は，量子化に伴う対称性の破れである．この現象は量子異常(quantum anomaly あるいは単に anomaly と書かれる)とも呼ばれるように，場の理論の非常に例外的な現象として最初は現われた．しかし，本書で説明するように，この現象は現代的な場の理論の本質にかかわる非常に基本的で一般的な意味を持つことがわかってきた．この現象は経路積分の手法では，積分変数の変換に伴うヤコビアンの注意深い計算に帰着することが明らかになった．すなわち経路積分の測度が対称性を破るわけである．

本書の主張は，量子異常とは量子論の基礎をより深く理解する試みの一つであり，したがって場の理論の枠組みを越えて，より広い意味での量子論全体に影響を及ぼしうる基礎的な概念であるというものである．この例として，光の位相演算子の問題を議論する．このような個別的なテーマの議論と並んで，本書で示したいのは，対称性の量子的な破れという非常に微妙な現象を理解するために場の理論で生み出された手法あるいは技法は，同時に非常に広い分野の現象を明瞭に理解する手段を提供するという事実である．このために，最後の章で 2 次元の場の理論の諸現象を取り上げた．2 次元の理論に特有な Fermi 粒子の理論の Bose 粒子を用いた記述であるボソン化という手法は，経路積分を用いた量子異常の定式化では，経路積分の単なる変数変換として理解することが可能である．また数理物理で基本的である Kac–Moody 代数とか Virasoro 代数の中心拡大は，場の理論の観点からは量子異常そのものである．この事実はよく知られていたが，本書では経路積分法を用いて，直接量子異常をこれら無限次元の代数の中心拡大に結びつける手法を説明する．

量子異常のもう一つの重要な側面は場の理論の位相的(topological)な性質と密接に結びついていることである．例えば，Yang–Mills 場の古典解であるインスタントンと結びついて，カイラル量子異常は数学の Atiyah–Singer の指数定理と呼ばれるものの量子的な表現になっている．同様に，弦理論におけるゴー

スト数の量子的破れは，Riemann 面の理論の基本である Riemann-Roch の定理の場の理論的な表現となっている．

以上のような諸問題を明確に理解するには，場の理論の摂動計算の複雑な分析を超えたより見通しの良い一般的な定式化が必須であり，本書では一貫して経路積分法をその基礎的な手法として用いる．

さて，量子異常の歴史に関しては，本書の第 1 章で述べるように，その起源は現代的な量子力学の定式化である「くり込み理論」の完成と同時に現われた．とくに朝永グループによる相対論的に不変な量子論の定式化が重要であった．量子異常に最初に遭遇したのは福田博・宮本米二の両氏が 1949 年に中性のパイ($\pi$)中間子の崩壊を計算したときであり，朝永もその理解に頭を悩ませた．しかし，その本質が本当に理解され始めたのは 1969 年であった．

ここで，本書の構成を簡単に説明したい．第 2 章は広い意味での量子力学の基礎的な手法の復習である．学部で量子力学を一通り習ったレベルの知識以上の予備知識を仮定しないで，本書(および現代的な場の理論)の理解に必要な最小限の Feynman の経路積分と Schwinger の作用原理の考え方を説明する．

第 3 章では Dirac に始まる光の量子論の基礎的な事柄を説明する．同時に指数という概念を用いて，光の位相演算子の基礎的な性質を説明する．付録 A では，これらの予備知識を補強するために，量子電磁力学のエッセンスをまとめる．付録 A の知識は本書の中心部分を理解するには必須ではないが，何が起こっているかをより広い立場から理解する助けになると思われる．

第 4 章では，これらの予備知識を用いて，真空の分極と呼ばれる現象を議論する．逆説的ではあるが，この一見簡単な真空の分極テンソルの計算は量子電磁力学のくり込み理論のすべての計算の中で最も難しいものであった．同時に，この章で導入した場の理論の発散をコントロールする正則化を用いて，一番簡単なしかし重要な 3 角形の Feynman 図に対応する計算を Feynman 図を用いずに計算し，カイラル量子異常とは何かを説明する．

第 5 章は本書の中心をなす章であり，経路積分法を用いて対称性の量子的破れは実は経路積分の変数変換に伴うヤコビアンとして理解できることを示す．同時にインスタントン解の概要を説明し，Atiyah-Singer の指数定理と呼ばれるものとカイラル量子異常の関係を説明する．この知識を用いて，相互作用表示へ

のユニタリー変換の問題点および Nambu-Goldstone の定理がその対称性に量子異常が存在するときには一般に成立しないことを説明する．

第6章以下では個別的な応用や量子異常の考え方の発展を記述する．したがって，記述もこれまでの章よりはかなり圧縮されたものとなる．読者は，6章以下の各章はそれぞれの興味に従って読んでいただきたい．各章はできるだけ独立に理解できるように記述した．第6章は，現代的なゲージ理論への量子異常の応用のまとめである．ほとんどすべての計算を具体的に実行してある．

第7章は，時空間の(局所的な角度を保って)長さを伸縮させる Weyl 変換という変換の量子的な破れの説明である．エネルギー運動量テンソルのトレースが関わっている．くり込み群の方程式は基本的には Weyl 量子異常の Green 関数を用いた表現である．この関連で，$\beta$ 関数と呼ばれるくり込み群で重要な量を量子異常の観点から計算する．また2次元の共形場の理論の基礎とも関わっている．

第8章は任意の偶数次元の時空間でのカイラル量子異常の計算をまず議論し，数学の Chern 指標および Dirac 示性数との関係を説明する．重力の関係した量子異常の分析でも木村利栄先生が1969年に重要な計算を行っていたことに注意したい．この章では，Einstein の重力理論で基本的な一般座標変換も，カイラルな Fermi 粒子の理論では一般に量子的に破れる可能性があるという事実を説明する．

第9章は最近3年間ほどの間に起こった格子ゲージ理論における Fermi 粒子の扱いの注目すべき発展を筆者の立場から見た紹介である．格子ゲージ理論でも指数という概念が扱えるという驚くべき事実が明らかになり，カイラル量子異常が連続理論と全く同じレベルで扱えるようになった概要を説明する．この章および次の章の内容は，数学的な厳密さを尊重する人たちの要求にもある程度耐えられるものである．

第10章は，すでに述べたように2次元の場の理論における量子異常と関連した話題の紹介である．それぞれの項目に関してはごく初歩的基本的な性質の説明であるが，量子異常の経路積分法の広がりを示し，また同時にこれらの現象のよりわかりやすい明確な定式化に導く可能性を示す．最後に弦の量子論と関係して Liouville の作用および Riemann-Roch の定理と関係したゴースト数

の量子的破れを説明する．

第 11 章では，量子的な対称性の破れの直感的な説明の可能性に触れ，また本文中では議論しなかった Witten の大局的 $SU(2)$ 量子異常の簡単な説明を与えた．

付録 A では量子電磁力学の簡単なサマリーを与え，付録 B では曲がった空間の場の理論の基礎的な事項の説明を与えた．付録 C では，参考文献を簡単なコメントをつけて説明した．

さて，筆者が量子異常に興味を持ったのは 1970 年代の後半であったが，当時日本でこの分野を研究しておられたのは西島和彦先生のグループであった．経路積分法を提案した筆者の論文が 1979 年の春に出版された直後，New York 州立大学の C. N. Yang 先生から旧知の原子核研究所の山口嘉夫先生宛に telex が届いて，Stony Brook にお招きいただいた．実際の訪問は翌 80 年の 2 月からの 6 ヵ月間であったが，Stony Brook の寒い冬の中で Weyl 量子異常を含むすべての量子異常が経路積分のヤコビアンとして理解できることを考察したことが当時の日記の記述からもうかがえ，懐かしい思い出である．Yang 先生には以後も折にふれてお励ましを頂いた．また New York 市立大学の崎田文二先生にも，研究の初期の頃からいろいろお励ましと助言を頂いた．これらの方々にここで感謝の意を表したい．

本書は吉川圭二先生および岩波書店編集部の吉田宇一氏のお勧めに従い書き上げたものであり，これらの方々に深くお礼申し上げる．

2001 年 1 月

藤 川 和 男

# 目　次

# 1 くり込み理論の誕生と対称性の量子的破れの発見

## 1.1 はじめに

現代の物理学における中心的な原理は，量子論の原理である．古典力学であれ，特殊相対論に基づく力学であれ，あるいは電磁場とか原子核に働く力であれ，ミクロな系に適用する場合にはすべて量子論の原理に従うように定式化されなくてはならない．

このことは重力を記述する一般相対性理論も例外ではなく，ミクロの領域では量子重力を考える必要がある．古典力学自体も量子論において Planck の定数 $\hbar$ をゼロにした極限で実現されると考えられる．

このような量子論の基礎方程式は Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{1.1.1}$$

で与えられ，Schrödinger の波動関数 $\psi$ は確率振幅としての意味を持つ．波動関数は例えば水素原子の固有関数が無限個あることからわかるように，これらの固有関数を成分として持つ無限次元のベクトルすなわち Hilbert 空間のベクトル(あるいは要素)とみなされる．このことを強調する場合には，波動関数は $|\psi\rangle$ と書かれることが多い．確率の定義からして波動関数の大きさの 2 乗は正であること，すなわち，波動関数が属する関数空間の計量(ノルム)は正定値であること，

$$\langle\psi|\psi\rangle \geqq 0 \tag{1.1.2}$$

が要請される．Schrödinger 方程式は，エルミートなハミルトニアンで時間発展

を記述し，したがって時間発展は波動関数のユニタリー変換，

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-(i/\hbar)Ht\right)|\psi(0)\rangle \tag{1.1.3}$$

を引き起こす．ユニタリー変換の定義により，波動関数の大きさ(全確率)は時間的に変化しない．時間的に変化するのは，無限次元のベクトルと考えたときの波動関数の第一成分が第二成分に変わるといった変化である．

量子力学を光を含めたより一般の現象に適用するには，場の変数そのものを量子化するいわゆる場の理論としての定式化が必要となる．この場の理論では，直感的には空間の各点に振動子を配置し，それらすべての振動子を同時に量子化することになる．これらの振動子が励起されたり減衰することを振動子に付随した粒子の生成消滅として理解するわけである．言うまでもなく，空間には無限個の点があり，したがって無限個の振動子を扱うことになる．あるいは，問題を少し書き直すと，無限個の調和振動子の集合体が互いに相互作用を及ぼしあっている形に定式化される．この理由で場の理論は無限自由度の系の量子力学と呼ばれる．通常の量子力学で一個の調和振動子に対してすでに Hilbert 空間という無限次元のベクトルが現れたが，さらに無限大個の調和振動子が現れるわけである．

このような場の理論のもっとも代表的なものが，電子と光の相互作用を扱う電磁力学である．いずれにしても，これらの粒子の生成と消滅に伴う自由度を扱うには初期にはいろいろ微妙な問題が現れた．場の理論の発散の問題と呼ばれるものがその代表的なものである．この粒子の生成と消滅の自由度と発散の問題の注意深い考察から生まれたのが，本書の主題である量子異常(quantum anomaly あるいは単に anomaly)と呼ばれる現象である．量子異常と発散の基本的に違うところはどちらも無限大の自由度と関連しているが，量子異常は発散しないという点にある．量子異常は対称性の量子化による破れとして理解するのが正しい．しかし，相互作用表示での摂動計算においては量子異常は発散の問題と密接に関係して現れる．その理由で，量子異常は紫外発散と関係した量とよくいわれる．この表現自身は量子異常の研究の歴史的な由来およびその特徴のある側面を捉えてはいるが，正確には発散と対称性の量子的破れは明確に区別する必要がある．

## 1.2 光の質量はゼロか

ここで，量子異常の研究の歴史を簡単に述べておきたい．1940年代の後半に提案された量子電磁力学とそのくり込み理論は，量子論の原理の適用限界は非常に広く，考えうるすべてのエネルギー領域をカバーする可能性を示した．この現代的な量子電磁力学(Quantum Electrodynamics, QEDと略記される)は，良く知られているように朝永振一郎，J. Schwinger, R. Feynman, F. Dysonといった理論物理学者によって完成された．第2次世界大戦後の世界から孤立した日本における朝永グループによる量子電磁力学の建設は欧米の物理学者から見て，湯川中間子理論に次ぐ驚きであった．当時プリンストンの高等研究所の所長をしていたJ. Oppenheimerの要請に応えて朝永が日本国内における研究の概要を書き送ったものが，Oppenheimerを通じて，アメリカ物理学会のPhysical Review誌のLetters to the Editors(速報)欄に掲載された．この手紙のなかで，朝永は相互作用表示に基づく共変的な場の理論とくり込みの処方(すなわち，発散の矛盾のない処理)は，電子の質量，電子と光の結合定数(すなわち電荷)，および電子と光の場の変数のくり込みに関してはすべてうまく行くが，光子の質量に関してはうまく行かないと述べている．朝永の言葉を借りれば，光子の質量に関しては“電子の質量とか電荷に対すると同じような自然なくり込みの処方の理論づけができない”と述べている．これは，実験的には確立している光子の質量がゼロであること，およびそれを保証しているゲージ理論の原理が相互作用表示に基づく摂動論ではうまく扱えないのではないかという問題を提起していた．

現時点で振りかえってみると，この光子の質量をいかにゼロにするか，あるいはゲージ原理をいかに場の理論において保証するかという問題は本書の主題である量子異常の問題の始まりであった．場の理論のような多数の自由度を扱う理論では，形式的には成立しているゲージ対称性を本当に保ちうるのかどうか，あるいは相互作用表示へのユニタリー変換が本当にうまくいっているのかどうか，これらの問題がまさしくこれから議論する対称性の量子的破れの本質である．

## 1.3　発散の問題とカイラル量子異常の発見

光子の自己エネルギーの問題を，後に詳しく説明する相対論的に不変な形に定式化された(したがって粒子の生成と消滅を記述できる)量子力学の摂動理論で考えるとどうなるかを簡単に説明したい．光子(これは通常 $\gamma$ と記される)が電子(これは $e$ で表す)と陽電子(これは $\bar{e}$ で表す)の対に変わる相互作用を記述するハミルトニアンを $H_I$ と書くとき 2 次の摂動による光子の自己エネルギーは，量子力学の基本的な公式を用いて

$$\Delta E = \sum_n \langle\gamma|H_I|e\bar{e}\rangle \frac{1}{E - E_n} \langle e\bar{e}|H_I|\gamma\rangle \qquad (1.3.1)$$

で与えられる．この中間状態のエネルギー $E_n = E_e + E_{\bar{e}}$ に関する和は一般に発散する．これは，電子と陽電子の対がつくる状態の数がエネルギー $E_n$ が大きくなると急激に増えることと，平坦な Minkowski 空間で定義された相対論的な理論では，エネルギーは限りなく大きい値をとることができることによっている．すなわち，電子と陽電子の対生成に伴う(運動量空間の)無限大の自由度の直接的な表現である．光子の質量がゼロであるとは，エネルギーは運動量 $\vec{k}$ の関数 $\Delta E(\vec{k})$ であるが，

$$\Delta E(\vec{0}) = 0 \qquad (1.3.2)$$

となることである．

Feynman 図を用いたより直感的な描像では，この摂動計算は図 1.1 のような Feynman 図の計算に対応する．すなわち，光子が真空中で電子と陽電子に仮想的に分解し，ある時間の後に再び光子に再結合する．この過程で光子の自己エネルギーに対する高次の量子補正が現れる．この図が発散し(詳しくは 2 次の発

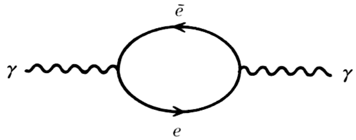
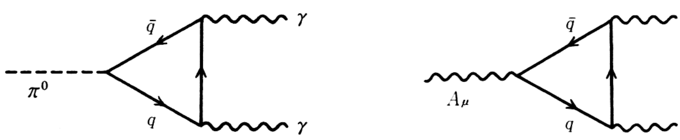



**図 1.1**　光子の自己エネルギー

散)，しかもくり込み理論の処方では一意的には決まらないということは，本来0である光子の質量が不定になるおそれがある．ただし，現在における QED の理解では，発散を正則化した注意深い計算をすれば，光子の質量は摂動計算のすべての次数でゼロにできることが知られている．

しかし，1949 年の当時には，この問題はくり込み理論の基本にかかわる問題であり，朝永スクールの若手メンバーであった福田博と宮本米二は，次に簡単な Feynman 図である中性の $\pi$ 中間子(これは，$\pi^0$ と記される)の二つの光子への崩壊，$\pi^0 \to \gamma\gamma$，を記述する図 1.2a と図 1.2b のグラフを計算した．すなわち，中性のスピン 0 の $\pi$ 中間子が真空中で(現代的な言葉でいうと)クォーク $q$ と反クォーク $\bar{q}$ に仮想的に分解し，このクォークの対が消滅する前に 2 個の光を放出するグラフと，スピン 1 の(軸性)ベクトル中間子 $A_\mu$ がクォークと反クォークの対に分解しこれらのクォークが対消滅する前に 2 個の光を放出する過程を比べるわけである．くり込み理論の予言はこれらの 2 つのグラフの間には簡単な関係(一種の対称性)が存在するというものであった．しかし，実際の計算は，まず第二のグラフにおいてはゲージ不変性が破れておりさらに 2 つのグラフの間の関係は壊れていることを示した．2 つのグラフの中の後者のグラフの計算は発散する(この場合は，詳しく言うと一次の発散)ので，注意深い計算が必要になる．しかし一次の発散はすでに電子の自己エネルギーの計算で現れ，くり込み理論がうまく行くことが知られていた．したがって，この 3 角形のダイアグラムは，問題なく計算できるはずであった．

このようにくり込み理論の予言と計算が食い違う例が多数あるというのは，くり込み理論の根幹にかかわる重大問題であった．事実，朝永はこの 3 角形の




(a)　中性パイ中間子の 2 光子崩壊　　(b)　中性ベクトル中間子の 2 光子崩壊

**図 1.2**

ダイアグラムの計算を若手研究者と共同で，Feynman 図の正則化の処方としては当時提案されたばかりの Pauli と Villars の方法(この論文のプレプリントが Pauli から朝永に送られてきた)を用いて詳細に分析し，福田-宮本の見いだした異常な振る舞いのうち第二のグラフのゲージ不変性の問題は Pauli-Villars の正則化で処理できるが，二つのグラフを結びつける関係式は正則化では一意的には解決できないことを結論した．この問題の解決には，将来の実験結果を待つ必要があると書いている．同様の計算は，当時プリンストンに滞在していた湯川を通じて福田と宮本の計算を知らされた J. Steinberger (このあたりの事情は Steinberger の論文の脚注に説明されている)によっても Pauli-Villars の正則化を用いて行われ，やはり朝永たちと同様な結論に達した*1.

量子電磁力学におけるゲージ不変性の問題および上記の 3 角形のダイアグラムは，2 年後の 1951 年にアメリカで Schwinger によっても総括的に分析され，3 角形のダイアグラムに関係する異常な結果が同様に結論された．しかし，当時においては「発散に伴う不定性」と「対称性の量子的破れ」は，明確に区別されておらず，この奇妙な振る舞いの本質的な理解には至らなかった*2.

この 3 角形のグラフによる $\pi$ 中間子の崩壊の問題は，1960 年代後半において再び中心的な問題として浮上した．今回は，$\pi$ 中間子がカイラル対称性の自発的な破れに伴う，いわゆる南部-Goldstone 粒子としての理解が確立していた．この考えと正準量子化の処方に基づく素朴に予想される結果を上記の 3 角形のグラフに適用すると，$\pi^0$ 中間子は 2 個の光子には崩壊できないことが結論された．これは，実験的に確立している $\pi^0$ 中間子はほとんどすべて 2 個の光子へ崩壊するという事実とは矛盾する．

この問題は，CERN で研究していた J. Bell と R. Jackiw および独立にプリンストンにいた S. Adler により精密に分析された．結論としては，福田-宮本および朝永，Steinberger などにより見出されていた 3 角ダイアグラムの異常な振る舞いを考慮すれば，南部-Goldstone 粒子としての $\pi^0$ 中間子は，実験結果と合致して大部分 2 個の光子に崩壊することが示された．同時に，3 角ダイアグラ

*1　ちなみに，J. Steinberger は後に実験物理に転じ，2 種のニュートリノの発見により Nobel 賞を受賞することになる．

*2　このあたりの事情に関しては，次の記事を参照されたい．西島和彦，日本物理学会誌 **47** (1992)859.

ムの異常な振る舞いは相対論的に不変でくり込み可能なゲージ場の理論では必然的なものであり，除去できないことが示された．すなわち，素朴な場の理論に基づく結論とは異なる振る舞いを Feynman 図の分析が示すという事実，およびその異常と思われる振る舞いがむしろ実験事実および場の理論の基本的な要請とよく合致する結果を与えるということが確立したわけである．これが，現代的な意味での対称性の量子的破れの発見であった．1969 年のことである．

現在では，このような対称性の量子的破れは，大別して 2 種類に分類されることが知られている．一つは，上記の 3 角形のダイアグラムと関係した Dirac の行列 $\gamma_5$ を含むカイラル量子異常(chiral anomaly)であり，もう一つは時空の長さの伸縮(共形変換あるいは Weyl 変換と呼ばれる)に関係した Weyl 量子異常(Weyl anomaly あるいは conformal anomaly)である．これらの対称性の量子的破れは，経路積分では積分変数の変換に伴うヤコビアンに起因しており，この現象は場の理論(特に一般のゲージ場の理論)全体をカバーする基本的な概念であることを示すのが本書の目的である．

# 2 Feynmanの経路積分とSchwingerの作用原理

## 2.1　調和振動子の量子論

この節では，量子力学の復習として，最も重要な調和振動子の正準量子化を議論する．

調和振動子のハミルトニアンは，$\hat{q}$ と $\hat{p}$ を座標と運動量として

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2 \tag{2.1.1}$$

で与えられる．$m$ は質量，$\omega$ は振動数を表す．量子力学の原理は，$\hbar$ をプランク定数を $2\pi$ で割ったものとして

$$[\hat{p}, \hat{q}] = \frac{\hbar}{i} \tag{2.1.2}$$

により与えられる．

時間に依存しない Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)\psi(q) = E\psi(q) \tag{2.1.3}$$

で与えられ，エネルギー固有値は $n$ をゼロあるいは正の整数として

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{2.1.4}$$

で与えられ，固有関数 $u_n(q)$ はエルミート多項式を用いて書かれる．

同じ問題を，生成と消滅演算子を用いて議論するのは，場の理論の量子論との関連においても重要である．このアプローチでは

$$
\begin{aligned}
\hat{a} &= i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q} \\
\hat{a}^\dagger &= -i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hat{p} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q}
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

を定義する．このとき $\hat{p}$ と $\hat{q}$ の交換関係を用いて

$$
[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \tag{2.1.6}
$$

の関係が示され，ハミルトニアンは

$$
\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})\hbar\omega = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{2.1.7}
$$

で与えられる．また

$$
[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}, \quad [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega\hat{a}^\dagger \tag{2.1.8}
$$

の関係が成立する．$|n\rangle$ を

$$
\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle \tag{2.1.9}
$$

を満たす状態とすると，負のエネルギー状態が存在しないためには，最低エネルギー状態 $|0\rangle$ に対して

$$
\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{2.1.10}
$$

が要請される．量子論という観点からは，この条件は任意の $n$ に対して負の計量(確率)が現れない条件

$$
\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = ||\hat{a}|n\rangle||^2 \geqq 0 \tag{2.1.11}
$$

としてより基本的な意味を持つ．

この基底状態から出発して $\hat{a}^\dagger$ をくり返し掛けることにより一般の状態 $|n\rangle$ は，

$$
\begin{aligned}
|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \\
\langle n|n\rangle &= 1
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

で与えられる．

Schrödinger の波動関数の時間発展

$$
\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi(0) \tag{2.1.13}
$$

は

$$\langle q|\psi(t)\rangle = \int dq' \langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q'\rangle\langle q'|\psi(0)\rangle \tag{2.1.14}$$

と書くことができることからわかるように，量子論においては時間発展の演算子(evolution operator) $\langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q'\rangle$ が基本的である．

## 2.2 調和振動子の経路積分

この時間発展の演算子は

$$\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt[p(t)\dot{q}(t) - H(q(t),p(t))]\right\} \tag{2.2.1}$$

という経路積分表示で表すことができる．右辺は，時間 $t_i$ で $q_i$ から出発して時間 $t_f$ において $q_f$ で終わるすべての古典的な位相空間における道(経路)に関する和を意味する．左辺では $\hat{q}$ と $\hat{p}$ は時間に依存しない Schrödinger 表示での演算子であるが，右辺では $q(t)$ および $p(t)$ は時間に依存する古典的な座標と運動量を表す．

この表式の意味を具体的に見て行くと，まず座標表示と運動量表示の完全性

$$\int dq|q\rangle\langle q| = 1, \qquad \int \frac{dp}{2\pi}|p\rangle\langle p| = 1 \tag{2.2.2}$$

に注意すれば，時間間隔を $N$ 個に分割して $\epsilon \equiv (t_f - t_i)/N$ として

$$\begin{aligned}
&\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle \\
&= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1}\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-2}\rangle\cdots\langle q_1|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_i\rangle \\
&= \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1}\frac{dp_1}{2\pi}\frac{dp_2}{2\pi}\cdots\frac{dp_N}{2\pi}\langle q_f|p_N\rangle\langle p_N|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-1}\rangle \\
&\quad \times\langle q_{N-1}|p_{N-1}\rangle\langle p_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_{N-2}\rangle\cdots\langle q_1|p_1\rangle\langle p_1|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\epsilon}|q_i\rangle
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

と書くことができる．ここで，

$$\begin{aligned}
\langle p_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\epsilon}|q_{N-2}\rangle &\simeq \langle p_{N-1}|1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})\epsilon|q_{N-2}\rangle \\
&= \langle p_{N-1}|q_{N-2}\rangle\left(1 - \frac{i}{\hbar}H(q_{N-2},p_{N-1})\epsilon\right)
\end{aligned}$$

$$\simeq \langle p_{N-1}|q_{N-2}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}H(q_{N-2},p_{N-1})\epsilon} \qquad (2.2.4)$$

および

$$\langle q|p\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}pq} \qquad (2.2.5)$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
&\langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle \\
&= \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}[p_N(q_f-q_{N-1})/\epsilon + p_{N-1}(q_{N-1}-q_{N-2})/\epsilon + \right. \\
&\qquad \left. \cdots + p_1(q_1-q_i)/\epsilon - H(q_{N-1},p_N) - H(q_{N-2},p_{N-1}) - \cdots - H(q_i,p_1)]\right\}
\end{aligned} \qquad (2.2.6)$$

と書ける．ここで積分の測度を

$$\mathcal{D}q\mathcal{D}p \equiv dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1}\frac{dp_1}{2\pi}\frac{dp_2}{2\pi}\cdots\frac{dp_N}{2\pi} \qquad (2.2.7)$$

で定義した．$N\to\infty$ の極限を考えて($\dot{q}$ を $q$ の時間微分として)

$$(q_{N-1}-q_{N-2})/\epsilon \simeq \dot{q}_{N-1} \qquad (2.2.8)$$

などを考慮すると，最終的に経路積分の公式

$$\begin{aligned}
\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle &\equiv \langle q_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{q},\hat{p})(t_f-t_i)}|q_i\rangle \\
&= \int \mathcal{D}q\mathcal{D}p \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt[p(t)\dot{q}(t) - H(q(t),p(t))]\right\}
\end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

が得られる．ここで重要な点は，経路積分の道は繋がった(すなわち連続な)道にわたる和を取ることである．量子論においても，粒子の軌道は不連続になることはない．

上記の経路積分の導出からわかるように，ハミルトニアンが調和振動子を一般化した

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(q) \qquad (2.2.10)$$

の形をしているときにも経路積分表示は同様に成立する．またハミルトニアンが一般のポテンシャル $V(q)$ を用いて上のような形に書けるときには，運動量

に関する経路積分を具体的に実行することが可能である．

具体的には，

$$\int \frac{dp_n}{2\pi} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_n(q_n - q_{n-1})/\epsilon - \frac{1}{2m}p_n^2\right]\epsilon\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{m\hbar}{2\pi i \epsilon}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon}\right)^2 \epsilon\right] \tag{2.2.11}$$

に注意すれば，$\epsilon = (t_f - t_i)/N \to 0$ の極限で，Feynman の経路積分公式は

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int \mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{n=N} \epsilon \left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(q_{n-1})\right]\right\} \\ &= \int \mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}(t)^2 - V(q(t))\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

で与えられる．ただし $q_0 = q_i$, $q_N = q_f$ と定義し経路積分の測度も

$$\mathcal{D}q \equiv \lim_{N\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{m\hbar}{2\pi i\epsilon}}\right\}^N dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \tag{2.2.13}$$

のように，規格因子を含めて定義した．

この最後の表式(2.2.12)は，量子力学の力学(時間発展)が古典的な作用積分(ラグランジアンを時間に関して積分したもの)に $i/\hbar$ を乗じたものを指数の肩に載せて，4 次元の時空間で $t = t_i$ で $q_i$ から出発し $t_f$ で $q_f$ に終わる粒子のすべての連続な経路を足し挙げると得られることを示しており，経路積分の最も基本的な描像を与える．ただし，これらの経路は一般に古典力学の運動方程式を満たす必要はない．調和振動子の経路積分は Feynman によって最初に計算された．事実 Feynman は量子電磁力学の多くの計算を調和振動子の経路積分の一般化により遂行し，経路積分を確立すると同時にその有用性を実証した．

## 2.3　スカラー場の量子化

前節で議論した調和振動子の量子化の応用として，スピンを持たない粒子(これはスカラー場と呼ばれる)の量子論を議論したい．質量 $m$ を持つ自由な(実の)スカラー粒子を記述する波動場の方程式は，実数の場 $\phi(t, \vec{x})$ を用いて

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(t, \vec{x}) + (mc/\hbar)^2 \phi(t, \vec{x}) = 0 \tag{2.3.1}$$

で与えられる．この方程式は次のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi^2 \tag{2.3.2}$$

を用いた作用積分 $S = \int d^4x\mathcal{L}$ に変分原理を適用して

$$\delta S = \int d^4x\delta\phi(x)[-\partial_\mu\partial^\mu\phi(t,\vec{x}) - (mc/\hbar)^2\phi(t,\vec{x})] = 0 \tag{2.3.3}$$

から導かれる．ただし

$$\begin{aligned}&(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}),\\ &\partial_\mu\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^2,\\ &d^4x = d^3xdt\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

で定義した．すなわち，重複して現れる添え字に関しては一般に和をとる規約を用い，また 4 次元空間の計量は $g_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1) = g^{\mu\nu}$ とする．

したがって，共役運動量（密度）$\Pi(t,\vec{x}) = \dfrac{\delta}{\delta\dot{\phi}(t,\vec{x})}\mathcal{L} = \dfrac{1}{c^2}\dot{\phi}(t,\vec{x})$ を用いてハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \Pi(t,\vec{x})\dot{\phi}(t,\vec{x}) - \mathcal{L}\\ &= \frac{1}{2}[c\Pi(t,\vec{x})]^2 + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\phi(t,\vec{x})\vec{\nabla}\phi(t,\vec{x}) + \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi(t,\vec{x})^2\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

により与えられる．体積 $V$ の箱を考えて定義された平面波の正規直交系 $\{u_{\vec{k}}(\vec{x})\}$, $\int d^3xu_{\vec{k}}(\vec{x})u_{\vec{l}}(\vec{x}) = \delta_{\vec{k},\vec{l}}$ としては，具体的には次の実の関数系

$$\begin{aligned}u_{\vec{k}}(\vec{x}) &= S_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{i\sqrt{2V}}(e^{i\vec{k}\vec{x}} - e^{-i\vec{k}\vec{x}}), \quad k_z > 0,\\ u_{\vec{k}}(\vec{x}) &= C_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2V}}(e^{i\vec{k}\vec{x}} + e^{-i\vec{k}\vec{x}}), \quad k_z \leqq 0\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

を用いて

$$\phi(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} cq_{\vec{k}}(t)u_{\vec{k}}(\vec{x}), \quad c\Pi(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} p_{\vec{k}}(t)u_{\vec{k}}(\vec{x}) \tag{2.3.7}$$

のように展開すれば，ハミルトニアンは $\omega(\vec{k}) = c\sqrt{\vec{k}^2 + (mc/\hbar)^2}$ を用いて

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}}\left\{\frac{1}{2}p_{\vec{k}}^2 + \frac{1}{2}\omega(\vec{k})^2q_{\vec{k}}^2\right\} \tag{2.3.8}$$

のように振動数 $\omega(\vec{k})$ を持つ無限個の調和振動子の和の形に書ける．消滅と生成演算子を

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}} &= i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega(\vec{k})}}p_{\vec{k}} + \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}}q_{\vec{k}} \\ \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} &= -i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega(\vec{k})}}p_{\vec{k}} + \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}}q_{\vec{k}} \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

により導入するとハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2}\hbar\omega(\vec{k})[\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}] = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k})\left[\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right] \tag{2.3.10}$$

で与えられ，量子化条件は

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}] = \delta_{\vec{k},\vec{l}}, \ [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{l}}] = [\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}] = 0 \tag{2.3.11}$$

により与えられる．

Fock 空間表示と呼ばれる表示でのスカラー粒子の状態ベクトルは

$$\begin{aligned} &|n_1(\vec{k}_1), n_2(\vec{k}_2), n_3(\vec{k}_3), \cdots\rangle \\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{n_1!}}\frac{1}{\sqrt{n_2!}}\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\cdots\right\}(a^{\dagger}_{\vec{k}_1})^{n_1}(a^{\dagger}_{\vec{k}_2})^{n_2}(a^{\dagger}_{\vec{k}_3})^{n_3}\cdots|0\rangle \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

で与えられ，運動量が $\hbar\vec{k}_1$ の粒子が $n_1$ 個，運動量が $\hbar\vec{k}_2$ の粒子が $n_2$ 個，運動量が $\hbar\vec{k}_3$ の粒子が $n_3$ 個，…など存在する状態を表す．第一量子化における調和振動子と場の理論における粒子数表示(Fock 空間表示)の物理的な解釈の決定的な違いは，例えば運動量 $\hbar\vec{k}$ を持つ $n$ 個の粒子状態は

$$|n(\vec{k})\rangle = \frac{1}{\sqrt{n(\vec{k})!}}(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}})^{n(\vec{k})}|0\rangle \tag{2.3.13}$$

により与えられると解釈し，調和振動子の量子力学の場合のようにこの状態を $n$ 番目の励起状態とは考えないことである．

量子化されたスカラー場の経路積分表示は，1 個の調和振動子の場合を一般化して

$$\langle\{q^f_{\vec{k}}\}, t_f|\{q^i_{\vec{k}}\}, t_i\rangle = \int\prod_{\vec{k}}\mathcal{D}q_{\vec{k}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{\vec{k}}\int_{t_i}^{t_f}dt\left[\frac{1}{2}\dot{q}_{\vec{k}}(t)^2 - \frac{\omega(\vec{k})^2}{2}q^2_{\vec{k}}(t)\right]\right\} \tag{2.3.14}$$

と書かれる．あるいは，変数 $\phi(t,\vec{x})$ を用いた表現に直すには

$$\phi(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} cq_{\vec{k}}(t)u_{\vec{k}}(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \langle\vec{x}|\vec{k}\rangle q_{\vec{k}}(t) \tag{2.3.15}$$

を思い起こして

$$\mathcal{D}\phi = \det\,[\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle] \prod_{\vec{k}} \mathcal{D}q_{\vec{k}} \tag{2.3.16}$$

のように $q_{\vec{k}}(t)$ から $\phi(t,\vec{x})$ へ(Dirac の意味で)変数変換する．

$$\begin{aligned}&\int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}(t,\vec{x})^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi(t,\vec{x}))^2 - \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi(t,\vec{x})^2\right] \\ &= \sum_{\vec{k}} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2}\dot{q}_{\vec{k}}(t)^2 - \frac{\omega(\vec{k})^2}{2}q_{\vec{k}}^2(t)\right]\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

およびすべての $\{q_{\vec{k}}^i\}$ を $t = t_i$ で指定することとすべての空間点で $\{\phi_i(\vec{x})\}$ を $t = t_i$ で指定することが同等であることに注意する．このことを，$|\phi_i, t_i\rangle$ で表すとき，経路積分(2.3.14)は適当な規格化因子を $N$(これは，変数変換のヤコビアンも含む)として

$$\begin{aligned}&\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle \\ &= N\int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi(x)^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

のように相対論的に不変な形に書かれる．すなわち作用積分に $i/\hbar$ を乗じたものを指数の肩に乗せて，経路積分の測度としては 4 次元時空間のすべての点での積分

$$\mathcal{D}\phi = \prod_{t,\vec{x}} d\phi(t,\vec{x}) \tag{2.3.19}$$

を実行することにより，量子化された時間発展の演算子の行列要素

$$\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle \equiv \langle\phi_f|\exp[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f - t_i)]|\phi_i\rangle \tag{2.3.20}$$

が与えられることになる．

これまでは相互作用をしない自由なスカラー場を扱ってきたが，例えば，4 個のスカラー場が 4 次元の時空間の一点に重なった場合にだけ結合定数 $g$ の強さで相互作用する理論は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 \tag{2.3.21}$$

で定義されるラグランジアン密度で記述される．ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3x\{\Pi(t,\vec{x})\dot{\phi}(t,\vec{x}) - \mathcal{L}\} \\ &= \int d^3x\left\{\frac{1}{2}c^2\Pi(t,\vec{x})^2 + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\phi(t,\vec{x})\vec{\nabla}\phi(t,\vec{x}) + \frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi(t,\vec{x})^2 \right.\\ &\quad \left. + \frac{g}{4!}\phi(t,\vec{x})^4\right\}\end{aligned}$$

で与えられる．この場合も同様な考察により

$$\begin{aligned}&\langle\phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle \\ &= \langle\phi_f|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f - t_i)\right]|\phi_i\rangle \\ &= N\int\mathcal{D}\phi\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. -\frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi(x)^2 - \frac{g}{4!}\phi(x)^4\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

のように相対論的に不変な形に書かれる．この最後の表式は，古典的な作用積分に $i/\hbar$ を乗じたものを指数の肩に乗せ全関数空間にわたって積分したもので与えられており，Lorentz 変換に対して不変な形に書かれている．

スカラー場 $\phi(t,\vec{x})$ は古典的な場としては，2 つの場はすべての時空点でお互いに交換する．この性質は量子論では，Heisenberg の交換関係に置き換えられ，Bose 粒子を表すことになる．経路積分の表式(2.3.22)は，すべての相対論的に不変な Bose 場の理論の経路積分表示の基礎をなすものである．

## 2.4 Fermi 粒子の経路積分

Fermi 粒子の経路積分を議論するため，まず一つの自由度を持つ自由な Fermi 粒子を記述するハミルトニアン[*1]

*1 演算子を表すハット符合 $\hat{a}$ 等は，混同がない場合は省略することにする．

$$H = \hbar\omega a^\dagger a \tag{2.4.1}$$

に基づく経路積分を定式化し，後に場の理論への一般化を議論する．ここで，$\hbar\omega$ は Fermi 粒子が持つエネルギーを表し，$a^\dagger$ と $a$ は生成消滅演算子であり

$$\{a, a^\dagger\} \equiv aa^\dagger + a^\dagger a = 1,\ \ \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \tag{2.4.2}$$

の関係を満たし，ハミルトニアンとの交換関係は Bose 粒子の場合と同じ

$$\begin{aligned} [H, a] &= -\hbar\omega a \\ [H, a^\dagger] &= \hbar\omega a^\dagger \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

を満たす．物理的な状態は，粒子が存在しない真空状態 $|0\rangle$ と粒子が 1 個存在する状態 $|1\rangle$ に限られ，これらは上記の $a^\dagger$ とハミルトニアン $H$ を用いて

$$\begin{aligned} |1\rangle &= a^\dagger|0\rangle \\ H|0\rangle &= 0, \quad H|1\rangle = \hbar\omega|1\rangle \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

のように表現される．$a^\dagger a^\dagger|0\rangle = 0$ から，粒子が 2 個以上存在する状態，$|2\rangle$ などは存在しない．すなわち Pauli の排他原理を満たすことになる．

Fermi 粒子が反交換関係で量子化されるということは，古典的には Fermi 粒子は常に反交換する Grassmann 数により記述されると考えられる．Grassmann 数，例えば，$\xi$ と $\eta$ は反交換関係

$$\{\xi, \xi^*\} = \{\xi, \xi\} = \{\xi, \eta\} = \{\eta, \eta^*\} = \{\eta, \eta\} = 0 \tag{2.4.5}$$

などの関係を満たす．したがって，例えば $\eta^2 = 0$ を満たし，大きさを持たない数に対応する．このことが，Fermi 粒子という概念が古典論では存在しなかった理由であり Fermi 粒子は純粋に量子的な存在と言える．

Grassmann 数に関する積分(すなわち，Grassmann 数から複素数への線形写像)を左微分で定義する．具体的には $\xi$ と $\xi^*$ の一般の関数は $\xi^2 = 0$ などに注意すると

$$f(\xi, \xi^*) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^* + c_3\xi\xi^* \tag{2.4.6}$$

のように複素数の係数，$c_0 \sim c_3$，を用いて表されるが，このとき積分は

$$\begin{aligned} \int d\xi f(\xi, \xi^*) &\equiv \frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi, \xi^*) \\ &= c_1 + c_3\xi^* \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

で定義される．ただし，複素数と Grassmann 数は互いに交換するものとする．左微分の定義から

$$\begin{aligned}\int d\xi^* f(\xi,\xi^*) &= \frac{\partial}{\partial\xi^*}(c_0 + c_1\xi + c_2\xi^* - c_3\xi\xi^*) \\ &= c_2 - c_3\xi \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

のように積分(具体的には微分)する変数をまず一番左に移動しておいてつぎに積分することになる．このように定義された積分は，積分の測度が変数の“並進”に関して不変である(変わらない)という重要な性質を持っている．すなわち，$\epsilon$ を Grassmann 数として $\xi' = \xi + \epsilon$ とするとき

$$\begin{aligned}\int d\xi f(\xi,\xi^*) &= \int d\xi' f(\xi',\xi^*) \\ &= \int d\xi f(\xi',\xi^*) \\ &= c_1 + c_3\xi^* \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

が確かめられる．この式で最初の等号は，積分変数の名前の付け方は任意であること(普通の定積分で言えば，$\int dx f(x) = \int dy f(y)$)を表しており，第二の等号は具体的に計算して確かめられる．同様な性質は $d\xi^*$ にも成立し，

$$d\xi = d(\xi + \epsilon), \quad d\xi^* = d(\xi^* + \epsilon^*) \tag{2.4.10}$$

という基本的な関係式が成立する．経路積分という観点からは，このように「並進不変な測度」が存在すれば，後に説明するように量子力学の運動方程式を満たす経路積分が定義され，積分の測度の最も基本的な性質である．

Fermi 粒子および Grassmann 数は順番を入れ替えると符号が変わる性質があるので，この符号に関係した複雑さを最小限に抑えるために，いわゆるコヒーレント状態という概念を用いることにする．コヒーレント状態は Fermi 粒子に対しては

$$|\xi\rangle = \exp(\xi a^\dagger + \xi^* a)|0\rangle \tag{2.4.11}$$

により定義され，具体的には右辺をべきに展開して $a|0\rangle = 0$ に注意すれば

$$|\xi\rangle = (1 + \frac{1}{2}\xi\xi^*)|0\rangle + \xi|1\rangle \tag{2.4.12}$$

のように $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の線形結合で書けることがわかる．ただし，Grassmann 数

と Fermi 粒子の演算子も反交換すること

$$\{\xi, a\} = \{\xi^*, a\} = \{\xi, a^\dagger\} = \{\xi^*, a^\dagger\} = 0 \tag{2.4.13}$$

を用いた．

このように定義されたコヒーレント状態は

$$\langle\eta| \equiv (|\eta\rangle)^\dagger = \langle 0|\exp(a^\dagger\eta + a\eta^*) \tag{2.4.14}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned} \langle\eta|\xi\rangle &= \eta^*\xi + \left(1 + \frac{1}{2}\eta\eta^*\right)\left(1 + \frac{1}{2}\xi\xi^*\right) \\ &= \exp\left(\eta^*\xi + \frac{1}{2}\eta\eta^* + \frac{1}{2}\xi\xi^*\right) \\ \langle\eta|a^\dagger a|\xi\rangle &= \eta^*\xi = \eta^*\xi\langle\eta|\xi\rangle \\ \sum_{n=0}^{1}\langle n|\eta\rangle\langle\xi|n\rangle &= \exp\left(\frac{1}{2}\eta\eta^* + \frac{1}{2}\xi\xi^* + \eta\xi^*\right) \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

の関係を満たすことが確かめられる．

またこのように定義されたコヒーレント状態は上で定義された積分を用いると完全性の関係を満たすことが確かめられる．すなわち

$$\int d\xi^* d\xi|\xi\rangle\langle\xi| = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \equiv 1 \tag{2.4.16}$$

が成立する．

さて，経路積分では時間発展の演算子(evolution operator)の行列要素

$$\langle n_b|e^{-(i/\hbar)H(t_b - t_a)}|n_a\rangle \tag{2.4.17}$$

を扱う．ここで，状態 $|n_a\rangle$ は粒子数の固有状態である．物理的には粒子数表示(Fock 表示)が重要であるが，上で議論したコヒーレント状態の完全性を用いれば，状態 $|n_a\rangle$ はコヒーレント状態の重ね合わせ

$$|n_a\rangle = \int d\xi^* d\xi|\xi\rangle\langle\xi|n_a\rangle \tag{2.4.18}$$

で表すことができるので，以下ではとりあえずコヒーレント状態の間の時間発展演算子

$$\langle\xi_b, t_b|\xi_a, t_a\rangle \equiv \langle\xi_b|e^{-(i/\hbar)H(t_b - t_a)}|\xi_a\rangle \tag{2.4.19}$$

を扱うことにする．時間間隔を $N$ 個の微少間隔に分割して

$$\epsilon = t_{j+1} - t_j = (t_b - t_a)/N \tag{2.4.20}$$

とするとき，上記の時間発展の演算子はコヒーレント状態の完全性を用いて

$$\langle\xi_b,t_b|\xi_a,t_a\rangle = \int \mathcal{D}\xi \langle\xi_b,t_b|\xi_{N-1},t_{N-1}\rangle\langle\xi_{N-1},t_{N-1}|\cdots|\xi_1,t_1\rangle\langle\xi_1,t_1|\xi_a,t_a\rangle \tag{2.4.21}$$

のように書くことができる．ここで，経路積分の測度を

$$\mathcal{D}\xi = \prod_{j=1}^{N-1} d\xi_j^* d\xi_j \tag{2.4.22}$$

で定義した．ここで現れる $N$ 個の無限小の時間間隔の行列要素はハミルトニアンの具体的な形 $H = \hbar\omega a^\dagger a$ と上で求めたコヒーレント状態が満たす関係式を用いると

$$\begin{aligned}\langle\xi_{j+1},t_{j+1}|\xi_j,t_j\rangle &= \langle\xi_{j+1}|e^{-(i/\hbar)H\epsilon}|\xi_j\rangle \\ &\simeq \exp\left(-i\omega\xi_{j+1}^*\xi_j\right)\langle\xi_{j+1}|\xi_j\rangle\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

のように $\epsilon$ の一次の精度で，すなわち $O(\epsilon^2)$ の項をすべて無視する近似で得られる．$O(\epsilon^2)$ の項は，$N\to\infty$ の極限では，効かないことが確かめられる．おなじ $\epsilon$ の一次の精度で

$$\begin{aligned}\langle\xi_{j+1}|\xi_j\rangle &= \exp\left(\xi_{j+1}^*\xi_j + \frac{1}{2}\xi_{j+1}\xi_{j+1}^* + \frac{1}{2}\xi_j\xi_j^*\right) \\ &\simeq \exp\left[-\frac{1}{2}\epsilon(\xi_j^*\dot{\xi}_j - \dot{\xi}_j^*\xi_j)\right]\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

と書ける．

このようにして，$N\to\infty$ の極限では $\epsilon N = t_b - t_a$ に注意して

$$\begin{aligned}&\langle\xi_b,t_b|\xi_a,t_a\rangle \\ &= \int \mathcal{D}\xi \exp\left\{i\sum_{j=0}^{N-1}\epsilon\left[\frac{1}{2}i(\xi_j^*\dot{\xi}_j - \dot{\xi}_j^*\xi_j) - \omega\xi_{j+1}^*\xi_j\right]\right\} \\ &\equiv \int_{\xi_a}^{\xi_b}\mathcal{D}\xi \exp\left\{(i/\hbar)\int_{t_a}^{t_b}dt\left[\frac{1}{2}i\hbar\xi^*\dot{\xi} - \frac{1}{2}i\hbar\dot{\xi}^*\xi - \hbar\omega\xi^*\xi\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

という経路積分の公式が得られる．ただし，$\xi_0 = \xi_a$ および $\xi_N^* = \xi_b^*$ とおいた．

このコヒーレント状態を用いた経路積分公式の特徴は，変分すると運動方程式を出すように作られた作用積分

$$S = \int dt[i\hbar a^\dagger \partial_t a - \hbar\omega a^\dagger a] \tag{2.4.26}$$

(の時間微分に関して対称化したもの)において，$a \to \xi$, $a^\dagger \to \xi^*$ と置き変えて得られる古典的な作用積分に $i/\hbar$ を乗じたものを指数の肩に乗せて，変数 $\xi$ と $\xi^*$ について積分すると，量子論の時間発展の演算子の行列要素が得られることである．

統計力学の分配関数 $Z(\beta)$ は温度 $T$ では $\beta = 1/kT$ と定義すると

$$Z(\beta) \ \equiv \ \mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H}) = \sum_n \langle n|e^{-\beta H}|n\rangle \tag{2.4.27}$$

で与えられるが，これはコヒーレント状態の完全性を用いて

$$\begin{aligned} Z(\beta) \ &= \ \sum_n \int d\xi_b^* d\xi_b d\xi_a^* d\xi_a \langle n|\xi_b\rangle\langle\xi_b|e^{-\beta H}|\xi_a\rangle\langle\xi_a|n\rangle \\ &= \ \sum_n \int d\xi_b^* d\xi_b d\xi_a^* d\xi_a \langle\xi_b|e^{-\beta H}|\xi_a\rangle\langle n|\xi_b\rangle\langle\xi_a|n\rangle \\ &= \ \sum_n \int d\xi_b^* d\xi_b d\xi_a^* d\xi_a \langle\xi_b|e^{-\beta H}|\xi_a\rangle\langle\xi_a|n\rangle\langle n| - \xi_b\rangle \\ &= \ \int d\xi_b^* d\xi_b d\xi_a^* d\xi_a \langle\xi_b|e^{-\beta H}|\xi_a\rangle\langle\xi_a| - \xi_b\rangle \\ &= \ \int d\xi_b^* d\xi_b \langle\xi_b|e^{-\beta H}| - \xi_b\rangle \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

と書ける．ここで，コヒーレント状態は，定義式からわかるように Grassmann 的な数($a$ とか $a^\dagger$ も含めて)を偶数個含んでおり，他の Grassmann 数とは交換するが，状態ベクトル $\langle n|\xi_b\rangle$ と $\langle\xi_a|n\rangle$ は具体的に計算してわかるように $\langle n|\xi_b\rangle\langle\xi_a|n\rangle = \langle\xi_a|n\rangle\langle n| - \xi_b\rangle$ の関係を満たすことを用いた．すなわち，分配関数は経路積分では $t_b - t_a \to -i\hbar\beta$ と置き換えた後に反周期的な境界条件を課して積分すればよいことがわかる．具体的には

$$Z(\beta) = \int d\xi^* d\xi \langle\xi|e^{-\beta H}| - \xi\rangle = 1 + e^{-\beta\hbar\omega} \tag{2.4.29}$$

が得られ，演算子形式の結果を出す．

ちなみに，周期的な境界条件で積分すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Str}\,(e^{-\beta H}) &\equiv \sum_n \langle n|(-1)^F e^{-\beta H}|n\rangle \\ &= \int d\xi^* d\xi \langle\xi|e^{-\beta H}|\xi\rangle = 1 - e^{-\beta\hbar\omega}\end{aligned} \tag{2.4.30}$$

が得られ超対称性を持つ理論の考察で重要な役割を果たす．ここで，$F$ は Fermi 粒子の数を表す演算子であり，Str は超跡(super trace)と呼ばれる．

## 2.5 Dirac 粒子の経路積分

さて，前節の経路積分を場の理論へ適用することを考える．Dirac 方程式に従う Fermi 粒子の場合は，古典的な作用積分は

$$\int \mathcal{L} d^3x dt = \int \bar{\psi}(t,\vec{x})[i\gamma^\mu\partial_\mu - (mc/\hbar)]\psi(t,\vec{x})d^3x dt \tag{2.5.1}$$

で与えられる．ただし，4 行 4 列の Dirac 行列 $\gamma^\mu$，$\mu = 0,1,2,3$ は

$$\begin{aligned}&\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \\ &(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \\ &(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \quad k = 1,2,3\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

で定義され，具体的には 2 行 2 列の Pauli 行列

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.5.3}$$

を用いて次の 4 行 4 列の表示で与えられる．

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \tau_k \\ -\tau_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3 \tag{2.5.4}$$

この $\gamma^0$ の表示では 1 は 2 行 2 列の単位行列を表す．Dirac 理論で基本的となるカイラルな性質を記述する $\gamma_5$ 行列は

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\}_+ = 0 \tag{2.5.5}$$

で定義され，現在の $\gamma$ 行列の表示では具体的に

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma_5)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5.6}$$

で与えられる．$\psi(t,\vec{x})_\alpha$，$\alpha = 1 \sim 4$ は 4 成分のスピナーであり，物理的にはこの 4 成分は粒子・反粒子のそれぞれスピン上向きと下向きの 4 つの自由度に対応する．また Dirac 共役を

$$\bar{\psi}(t,\vec{x}) \equiv \psi(t,\vec{x})^\dagger \gamma^0 \tag{2.5.7}$$

で定義した．

上記のラグランジアン密度 (2.5.1) を

$$\mathcal{L} = \psi(t,\vec{x})^\dagger i\partial_0 \psi(t,\vec{x}) - \psi(t,\vec{x})^\dagger[-i\gamma^0\gamma^k\partial_k + (mc/\hbar)\gamma^0]\psi(t,\vec{x}) \tag{2.5.8}$$

と書くとわかるように，$\psi(t,\vec{x})$ に共役な運動量演算子は

$$\Pi(t,\vec{x}) = \frac{i}{c}\psi(t,\vec{x})^\dagger \tag{2.5.9}$$

で与えられ，ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \psi(t,\vec{x})^\dagger[-i\gamma^0\gamma^k\partial_k + (mc/\hbar)\gamma^0]\psi(t,\vec{x}) \equiv \psi(t,\vec{x})^\dagger h\psi(t,\vec{x}) \tag{2.5.10}$$

で与えられる．

この場合には完全系 $\{u_n(\vec{x})\}$ としては，エルミート演算子 $h$ の固有関数である 4 成分の関数

$$hu_n(\vec{x}) = \lambda_n u_n(\vec{x}), \quad \int d^3x u_n(\vec{x})^\dagger u_m(\vec{x}) = \delta_{nm} \tag{2.5.11}$$

を選び

$$\psi(t,\vec{x}) = \sum_n \sqrt{\hbar c}\, a_n(t) u_n(\vec{x}) \tag{2.5.12}$$

のように展開すると

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \sum_n \hbar c\lambda_n a_n^\dagger a_n \tag{2.5.13}$$

で与えられる．正準量子化条件は，$\psi$ に対する運動方程式 $i\partial_0\psi(t,\vec{x}) = h\psi(t,\vec{x})$ から導かれる

$$i\frac{\partial}{\partial t}a_n(t) = c\lambda_n a_n(t) \tag{2.5.14}$$

と Heisenberg の正準方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}a_n(t) = \frac{i}{\hbar}[H, a_n(t)] \tag{2.5.15}$$

が一致するように

$$\{a_n, a_n^\dagger\} \equiv a_n a_n^\dagger + a_n^\dagger a_n = 1, \quad \{a_n, a_n\} = \{a_n^\dagger, a_n^\dagger\} = 0 \tag{2.5.16}$$

で与えられ，無限個の Fermi 的な振動子の集合と同等になる．ただし，現在の扱いでは“エネルギー固有値” $\hbar c\lambda_n$ は正にも負にもなる．この負のエネルギー問題は Feynman の $i\epsilon$ 処方と反粒子解釈(正準量子化では，負のエネルギーに対しては $a_n \to b_n^\dagger$, $a_n^\dagger \to b_n$ で置き換える)の導入で解決される．経路積分では素朴な定式化を行って Feynman の $i\epsilon$ 処方 $m \to m - i\epsilon$ を用いればよい．

したがって，経路積分は 1 個の振動子の場合の一般化として

$$\begin{aligned}
&\langle\{\alpha_n(t_f)\}, t_f|\{\alpha_n(t_i)\}, t_i\rangle \\
&= \int \prod_n \mathcal{D}\alpha_n^* \mathcal{D}\alpha_n \\
&\quad \times \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_i}^{t_f} [\frac{1}{2} i\alpha_n^*(t)\dot{\alpha}_n(t) - \frac{1}{2} i\dot{\alpha}_n^*(t)\alpha_n(t) - c\lambda_n \alpha_n^*(t)\alpha_n(t)] dt \right\}
\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

のように与えられる．

他方，古典的レベルで Grassmann 数の場の変数 $\psi(t, \vec{x})$ を Grassmann 数の係数 $\alpha_n(t)$ を用いて

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum_n \sqrt{\hbar c}\,\alpha_n(t) u_n(\vec{x}) \tag{2.5.18}$$

のように展開すると $u_n(\vec{x}) = \langle\vec{x}|n\rangle$ という記法で

$$\det\,[\langle m|\vec{x}\rangle]\det\,[\langle\vec{x}|n\rangle] \propto \det[\int d^3\vec{x}\langle m|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|n\rangle] = \sqrt{\det\,[\delta_{m,n}]} = 1 \tag{2.5.19}$$

が成立し

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi &= \det\,[\langle n|\vec{x}\rangle]^{-1}\det\,[\langle\vec{x}|n\rangle]^{-1}\prod_n \mathcal{D}\alpha_n^* \mathcal{D}\alpha_n \\
&= \prod_n \mathcal{D}\alpha_n^* \mathcal{D}\alpha_n
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

が得られる．また

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{1}{2}i\psi^\dagger(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^0}\psi(t,\vec{x})-\frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial x^0}\psi^\dagger(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})\right.\\&\qquad\left.-\psi^\dagger(t,\vec{x})h\psi(t,\vec{x})\right]d^3xdt\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{1}{2}i\alpha_n^*(t)\dot{\alpha}_n(t)-\frac{1}{2}i\dot{\alpha}_n^*(t)\alpha_n(t)-c\lambda_n\alpha_n^*(t)\alpha_n(t)\right]dt\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

の関係が成立する．経路積分で無限個の $\{\alpha_n(t_f)\}$ を指定することとすべての $\vec{x}$ について $\psi(t_f,\vec{x})$ を指定することは同等なので，$\langle\{\alpha_n(t_f)\},t_f| = \langle\psi_f,t_f|$ と書くことにする．

このようにして Fermi 粒子の経路積分(2.5.17)は

$$\begin{aligned}&\langle\psi_f,t_f|\psi_i,t_i\rangle\\&=\int\mathcal{D}\psi^\dagger\mathcal{D}\psi\exp\left\{(i/\hbar)\int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{1}{2}i\psi^\dagger(t,\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^0}\psi(t,\vec{x})\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-\frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial x^0}\psi^\dagger(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x})-\psi^\dagger(t,\vec{x})h\psi(t,\vec{x})\right]d^3xdt\right\}\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

のように古典的な作用積分を用いて書き直される．

ただし，上記の経路積分の肩には対称化された時間微分が現れるが，場の理論の応用では，次節で説明するように $t_f\to\infty$，$t_i\to-\infty$ ととり，時間的にも空間的にも有限な所に局在する Schwinger の源(source)を導入して一般の Green 関数を定義する．$S$ 行列は，Green 関数の適切な極限で定義される．このような場合には，経路積分の定義そのものは，時間的に周期的，$\psi(t_f\to\infty,\vec{x})=\psi(t_i\to-\infty,\vec{x})$,（あるいは反周期的に）にとることができる．このとき，時間に関して部分積分すると経路積分の公式は

$$\begin{aligned}&\langle\psi_f,t_f|\psi_i,t_i\rangle\\&=\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{(i/\hbar)\int_{t_i}^{t_f}\bar{\psi}(t,\vec{x})[i\gamma^\mu\partial_\mu-(mc/\hbar-i\epsilon)]\psi(t,\vec{x})d^3xdt\right\}\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

のように書かれる．ただし，積分変数として $\psi(t,\vec{x})^\dagger$ のかわりに $\bar{\psi}(t,\vec{x})\equiv\psi(t,\vec{x})^\dagger\gamma^0$ を用いた．

もう一つのより基本的な考え方として，$t \to -i\tau$ と Euclid 化した時間 $\tau$ を用いた理論を考え，Bose 粒子および Fermi 粒子ともに周期的境界条件を課して，経路積分を統計力学の分配関数(の一般化)として定義して，$\tau_f - \tau_i \to \infty$ の極限をとる方法がある．このときには

$$\sum_n \langle n|(-1)^F e^{-(1/\hbar)(\tau_f-\tau_i)H}|n\rangle \to \langle 0|e^{-(1/\hbar)(\tau_f-\tau_i)H}|0\rangle \qquad (2.5.24)$$

のように，基底状態(最低エネルギー状態)だけが効くことを用いて，無限の過去で基底状態から出発して無限の未来で基底状態に終わる一般の経路積分が定義される．ただし，$F$ は状態 $|n\rangle$ に含まれる Fermi 粒子の数を勘定する演算子である．場の理論では，基底状態は複雑な相互作用の効果をすべて含んでおり，したがって，この定義は物理的な基底状態の定義を同時に与えることにもなる．この場合も，経路積分の後に Minkowski 理論へ逆に Wick 回転 $\tau \to it$ をすると，通常の作用積分が肩に乗った(Feynman の $i\epsilon$ 処方を含む)経路積分の公式が得られる．

## 2.6 Feynman 経路積分と Schwinger の作用原理

この節で経路積分と場の理論の演算子形式を関係づける便利な処方として Schwinger の作用原理を議論する．歴史的には，量子論におけるラグランジアンの役割を論じた 1933 年の Dirac の論文に刺激され*2，Feynman は経路積分を定式化し，Schwinger は量子論の基礎として作用原理を定式化した．

さて，演算子に対する Heisenberg の方程式から

$$\hat{\phi}(t,\vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\phi}(0,\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \qquad (2.6.1)$$

が成立することに注意すると

$$\begin{aligned}\langle\phi_f,t_f|\hat{\phi}(t,\vec{x})|\phi_i,t_i\rangle &= \langle\phi_f,t_f|e^{\frac{i}{\hbar}i\hat{H}t}\hat{\phi}(0,\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\phi_i,t_i\rangle \\ &= \langle\phi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t)}\hat{\phi}(0,\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}|\phi_i\rangle \qquad (2.6.2)\end{aligned}$$

*2　ちなみに，この論文は 4 次元時空間全体にわたる先験的(a priori)な確率と言ったことにも触れており，後に湯川の「丸の理論」に結びつき，間接的には朝永の空間的な面上の Lorentz 共変な Schrödinger 方程式の定式化にも影響を与えた．

である．ここで，$|\phi\rangle$ は量子力学の座標表示 $|q\rangle$ の一般化であるので

$$\begin{aligned} \langle\phi_1|\hat{\phi} &= \phi_1\langle\phi_1| \\ \langle\phi_1|\phi_2\rangle &= \prod_{\vec{x}}\delta(\phi_1(\vec{x})-\phi_2(\vec{x})) \\ \int\mathcal{D}\phi_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| &= 1 \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

などが成立する．したがって，前節の経路積分表示を思い起こすと

$$\begin{aligned} &\langle\phi_f,t_f|\hat{\phi}(t,\vec{x})|\phi_i,t_i\rangle \\ &= \int\mathcal{D}\phi_1\mathcal{D}\phi_2\langle\phi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t)}|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\hat{\phi}(0,\vec{x})|\phi_2\rangle\langle\phi_2|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}|\phi_i\rangle \\ &= \int\mathcal{D}\phi_1\langle\phi_f|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f-t)}|\phi_1\rangle\phi_1\langle\phi_1|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}|\phi_i\rangle \\ &= \int\mathcal{D}\phi\phi(t,\vec{x})\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}d^4x\mathcal{L}\right\} \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

という経路積分表示が成立する．時間 $t_i$ から出発して時間 $t$ まで経路積分で時間発展してきた振幅が，時間 $t$ で $\phi(t,\vec{x})$ という項を含む積分を経て，再び時間 $t_f$ まで経路積分で時間発展するわけである．この式から

$$\begin{aligned} &\langle\phi_f,t_f|T^*\hat{\phi}(t_1,\vec{x})\hat{\phi}(t_2,\vec{y})|\phi_i,t_i\rangle \\ &\quad= \int\mathcal{D}\phi\phi(t_1,\vec{x})\phi(t_2,\vec{y})\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}d^4x\mathcal{L}\right\} \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

が成立する．ここで Bose 場の時間順序積は階段関数を用いて

$$\begin{aligned} &T^*\hat{\phi}(t_1,\vec{x})\hat{\phi}(t_2,\vec{y}) \\ &\quad= \hat{\phi}(t_1,\vec{x})\hat{\phi}(t_2,\vec{y})\theta(t_1-t_2)+\hat{\phi}(t_2,\vec{y})\hat{\phi}(t_1,\vec{x})\theta(t_2-t_1) \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

で定義される．ただし，$\theta(t_1-t_2)$ は $t_1>t_2$ なら 1，$t_2>t_1$ なら 0 で定義される．この時間順序積は一般に $n$ 個の場の変数にも定義され，時間の若い順番に右から並べるように指令する．演算子形式では $T^*$ で指定する時間順序は，経路積分では $c$ 数の場を任意の順序に並べて積分すれば経路積分は時間に関して順番に過去から積分するので，同じ答えが得られるわけである．ちなみに Fermi 粒子の場合は時間順序積は場の変数が反交換することを考慮して，例えば

$$T^{*}\hat{\psi}(t_1,\vec{x})\hat{\bar{\psi}}(t_2,\vec{y})$$
$$=\hat{\psi}(t_1,\vec{x})\hat{\bar{\psi}}(t_2,\vec{y})\theta(t_1-t_2)-\hat{\bar{\psi}}(t_2,\vec{y})\hat{\psi}(t_1,\vec{x})\theta(t_2-t_1) \qquad (2.6.7)$$

のように定義される．

つぎに $c$ 数の源場(source field) $J(x)$ を導入して

$$\mathcal{L}_J \equiv \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x)-\frac{1}{2}(mc/\hbar)^2\phi(x)^2-\frac{g}{4!}\phi(x)^4+\phi(x)J(x) \qquad (2.6.8)$$

を定義し，このラグランジアン密度を用いた経路積分を

$$\langle\phi_f,t_f|\phi_i,t_i\rangle_J=\int\mathcal{D}\phi\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}d^4x\mathcal{L}_J\right\} \qquad (2.6.9)$$

で定義する．添え字の $J$ は，時間発展が $\mathcal{L}_J$ で記述されていることを示す．

Schwinger の作用原理は，一般に始状態と終状態を固定しておいて時間発展を記述するラグランジアンを微少量変化させたときに

$$\delta\langle\phi_f,t_f|\phi_i,t_i\rangle=\int_{t_i}^{t_f}d^4x\langle\phi_f,t_f|\frac{i}{\hbar}\delta\hat{\mathcal{L}}(x)|\phi_i,t_i\rangle \qquad (2.6.10)$$

により，遷移振幅の変化が与えられるとして定義される．この式は Schrödinger 方程式と同等であることが示されるが，ここではその同等性は議論しない．この作用原理を，ラグランジアン $\mathcal{L}$ で源 $J(x)$ を時空の点 $x$ で微少に変化させた場合に適用すると

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\langle\phi_f,t_f|\phi_i,t_i\rangle_J=\langle\phi_f,t_f|\frac{i}{\hbar}\hat{\phi}(x)|\phi_i,t_i\rangle_J \qquad (2.6.11)$$

が得られる．左辺は $c$ 数の演算をしており，右辺では演算子を扱っていることがこの作用原理の重要なところであり，経路積分に共通する性質である．両者の関係は以下で明らかになる．演算子形式の場の理論における運動方程式は作用積分の $\phi$ に関する変分から

$$\partial_\mu\partial^\mu\hat{\phi}(x)+(mc/\hbar)^2\hat{\phi}(x)+\frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3-J(x)=0 \qquad (2.6.12)$$

で与えられる．したがって，この演算子の関係式の任意の行列要素は 0 になり，上記の作用原理と組み合わせると

$$[\partial_\mu \partial^\mu \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} + (mc/\hbar)^2 \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} + \frac{g}{3!}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \\ -J(x)]\langle \phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle_J \\ = \langle \phi_f, t_f|\partial_\mu\partial^\mu \hat{\phi}(x) + (mc/\hbar)^2\hat{\phi}(x) + \frac{g}{3!}\hat{\phi}(x)^3 - J(x)|\phi_i, t_i\rangle_J = 0 \tag{2.6.13}$$

を与える．

作用原理から与えられる関数微分方程式 (2.6.13) を $\langle \phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle_J$ に関して解くことができれば，量子論の遷移振幅がすべて計算できることになる．実は経路積分は，変数を $J(x)$ から $\phi(x)$ へ関数空間での Fourier 変換をして，この関数微分方程式を解いていることに対応している．具体的には

$$\langle \phi_f, t_f|\phi_i, t_i\rangle_J = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x \phi(x)J(x)\right] F[\phi] \tag{2.6.14}$$

と置いて，上記の方程式(2.6.13)へ代入すると $S_J = \int d^4x \mathcal{L}_J$ として

$$\int \mathcal{D}\phi\{\partial_\mu\partial^\mu \phi(x) + (mc/\hbar)^2\phi(x) + \frac{g}{3!}\phi(x)^3 - J(x)\} \\ \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\phi(x)J(x)\right] F[\phi] \\ = \int \mathcal{D}\phi \left\{\frac{\delta}{\delta\phi(x)} S_J\right\} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x \phi(x)J(x)\right] F[\phi] = 0 \tag{2.6.15}$$

を与える．ここで，$F[\phi] = \exp[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}]$ とおくと上式は

$$\int \mathcal{D}\phi \left\{\frac{\delta}{\delta\phi(x)}S_J\right\}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_J\right] = \int \mathcal{D}\phi\frac{\hbar}{i}\left\{\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_J\right]\right\} = 0 \tag{2.6.16}$$

となる．

もし経路積分の測度が関数空間における「並進」に対して不変，すなわち任意の微少な関数 $\epsilon(x)$ に関して

$$\mathcal{D}(\phi + \epsilon) = \mathcal{D}\phi \tag{2.6.17}$$

の関係を満たすなら

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_J(\phi)\right] = \int \mathcal{D}(\phi+\epsilon)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_J(\phi+\epsilon)\right]$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_J(\phi + \epsilon)\right]$$

が成立する．この等式の最初の関係は，通常の積分における定積分の結果は積分変数の名前の付け方にはよらないという関係式 $\int dx f(x) = \int dy f(y)$ の一般化であり，第二の等式は測度の並進不変性からきている．この等式において，$\epsilon(x)$ を無限小の関数として展開すると

$$\int \mathcal{D}\phi \int dx \epsilon(x) \left\{\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_J\right]\right\} = 0 \qquad (2.6.18)$$

が得られ，任意の関数 $\epsilon(x)$ を点 $x$ で $\delta$ 関数的にピークを持つように選べば，最終的に作用原理から要求される関係(2.6.16)を満たすことがわかる．

以上の考察から，積分の測度が関数空間で並進不変であることが，経路積分の最も基本的な性質であることがわかる．Bose 粒子の場合は積分は通常の数にわたる定積分であり，基本的な並進不変性，すなわち，$\int d(x+\epsilon) f(x+\epsilon) = \int dx f(x)$ あるいは $\int dx \frac{d}{dx} f(x) = 0$ の一般化が成立する．Fermi 粒子の経路積分においても，Grassmann 数に関する積分を扱うことになるが，前節で議論したように測度の並進不変性が示され，Bose 粒子の経路積分と同様な定式化が可能となる．(ちなみに，もし普通の複素数あるいは Grassmann 数以外に並進不変性を満たす測度が定義されれば，新しい統計を満たす粒子が量子論で定義できることになる．)

経路積分の公式で，虚数時間へ $t \to -i\tau$ のように変換し Euclid 理論へ Wick 回転すると，

$$\langle \phi_f | e^{-\frac{1}{\hbar}\hat{H}(\tau_f - \tau_i)} | \phi_i \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d^4x \mathcal{L}_E\right\} \qquad (2.6.19)$$

が得られるが，この式で積分変数に周期的な境界条件 $\phi_f = \phi_i$ を課して，$\phi_i$ についても積分すると(統計力学の分配関数を思い起こして)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\, e^{-\frac{1}{\hbar}\hat{H}(\tau_f - \tau_i)} &= \sum_n e^{-\frac{1}{\hbar}E_n(\tau_f - \tau_i)} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d^4x \mathcal{L}_E\right\} \qquad (2.6.20)\end{aligned}$$

が得られる．この式で $\tau_f - \tau_i \to \infty$ の極限を考えると最低エネルギー状態，すなわち真空状態だけが効くことになり，真空から真空への遷移振幅

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle = \int \mathcal{D}\phi \ \exp\left\{ \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_E \right\} \tag{2.6.21}$$

が得られる．この関係式は実時間の Minkowski 理論でも，真空状態以外の状態は激しく振動し 0 になると考えられるので，成立すると考えられる．すなわち

$$\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle = \int \mathcal{D}\phi \ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L} \right\} \tag{2.6.22}$$

伝搬関数の Feynman によるいわゆる $i\epsilon$ 処方(付録 A 参照)は，物理的な状態は負のエネルギーを持たないことおよび時間発展演算子 $\langle \phi_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_f - t_i)} | \phi_i \rangle$ の $t_f - t_i \to \infty$ での安定性と関係している．$\hat{H} \geqq 0$ すなわち $\hat{H}$ の固有値はすべて負でないとする．このとき $\hat{H} \to \hat{H} - i\epsilon = \hat{H}(1 - i\epsilon)$ と無限小の $\epsilon > 0$ を用いて置き換えると

$$\langle \phi_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(1-i\epsilon)(t_f - t_i)} | \phi_i \rangle \tag{2.6.23}$$

の $t_f - t_i \to \infty$ での安定性が保証される．真空状態が，時間が経つに従って負のエネルギー状態へ無限に落ち込んで，そのような非物理的な確率振幅が発散することはない．また $(1 - i\epsilon)(t_f - t_i) = e^{-i\epsilon}(t_f - t_i)$ に注意すると，$\epsilon = \pi/2$ まで $\epsilon$ を変化させて $(t_f - t_i) \to -i(\tau_f - \tau_i)$ で定義される Euclid 理論へ安定性を損なわずに Wick 回転できることになる．運動量空間で言えば，時間成分を $p_0 \to ip_E$ のように回転できることになり，逆に Euclid 空間で理論を定義しておいて $p_E \to -ip_0$ と回転して定義された Minkowski 理論では Feynman の $i\epsilon$ 処方が自動的に満たされることが示される．ちなみに，Wick 回転では内積 $p_\mu x^\mu$ が

$$p_\mu x^\mu = (p_E)_\mu x_E^\mu \tag{2.6.24}$$

のように Euclid 空間での内積になるように座標と運動量の時間成分を虚数に変換する．Euclid 理論では経路積分が Fresnel 積分から Gauss 積分に変換され，時間発展演算子の経路積分表示がより信頼できる積分として定義される．もちろん Schwinger の作用原理により演算子形式と経路積分を関係づける立場では，$i\epsilon$ 処方は演算子形式から自動的にでる．しかし，物理的には，負のエネルギー状態が時間軸の正の方向に伝搬しないという要請から来ていることを理解する

のは重要である．

場の理論の応用では，有限な時空点に値を持つ Schwinger の源場 $J(x)$ を加えた，真空から真空への遷移振幅

$$\langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J=\int\mathcal{D}\phi\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}d^4x\mathcal{L}_J\right\} \tag{2.6.25}$$

が最も重要である．物理的描像としては，$t=-\infty$ で真空から出発した状態が途中の湧き出し $J(x)$ で作られた一般には多粒子状態として時間発展し，ある時間の後にこれらの粒子は吸い込み $J(x)$ に吸われ，再び $t=\infty$ で真空に終わる確率振幅(あるいは，一般化された Green 関数)を扱うことになる．すなわち，Green 関数は

$$\begin{aligned}
&G(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\
&\equiv\langle 0,+\infty|T^*\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)|0,-\infty\rangle\\
&=\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\cdots\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\langle 0,\infty|0,\infty\rangle|_{J=0}\\
&=\int\mathcal{D}\phi\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}\right\}
\end{aligned} \tag{2.6.26}$$

で定義される．散乱理論の意味での，真空以外の状態からある他の状態への遷移振幅は Green 関数において適当な変数の時間を $\infty$ あるいは $-\infty$ に選んで，LSZ の公式と呼ばれる方法を用いて構成できることが知られている．最初から場の変数に境界条件を課して漸近状態を指定するより，まず相互作用をすべて取り入れた Green 関数を計算し，その後で LSZ の公式で物理的な散乱振幅を定義する方法は，相互作用をする理論での物理的な描像としてもより自然な散乱振幅に導く．また技術的にも，例えばくり込みの議論は，Green 関数を用いるとより自然に定義できる．

これまでは場の理論での経路積分の規格化を明確に指定しなかったが，実用上有用な規格化をここで与えておきたい．演算子形式でのいわゆる Heisenberg 描像での Green 関数は $\langle 0|T^*\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)|0\rangle$ で与えられるが，$\hat{H}|0\rangle=E_0|0\rangle$ に注意すると

$$\langle 0|T^*\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)|0\rangle=\frac{\langle 0|e^{-(i/\hbar)\hat{H}t_f}T^*\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)e^{(i/\hbar)\hat{H}t_i}|0\rangle}{\langle 0|e^{-(i/\hbar)\hat{H}(t_f-t_i)}|0\rangle}$$

$$= \frac{\langle 0, t_f | T^* \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)|0, t_i\rangle}{\langle 0, t_f | 0, t_i\rangle} \tag{2.6.27}$$

を得る．経路積分は，$t_f \to \infty$，$t_i \to -\infty$ の極限で定義したので，一般に経路積分を

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty\rangle_J = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_J\right\} \tag{2.6.28}$$

で定義するとき，規格化因子 $Z$ を

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_{J=0}\right\} \tag{2.6.29}$$

に選べばよいことがわかる．あるいは，

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty\rangle_{J=0} = 1 \tag{2.6.30}$$

である．実用上は，計算の途中では規格化にあまり心配せず，$Z$ を積分の測度に含めておいて必要に応じて上記のように規格化すればよい．

# 3 光の量子論と位相演算子

この章では，まず電磁場の量子化とその経路積分表示の概要を学ぶ．電磁場はゲージ場と呼ばれるものの最も簡単な例であり，電磁場の量子化はゲージ場一般の量子化に現れる技術的な問題を学ぶ格好の例題である．つぎに，電磁場を量子化して現れる光子という概念に付随した位相演算子の問題を，Hilbert 空間に負の計量が現れないという要請と指数という概念を用いて議論する．この位相演算子の問題は後に議論するカイラル量子異常と密接に関係していることを説明する．

## 3.1 電磁場の正準量子化

まず電磁場の正準量子化の概要を説明したい．基本的には調和振動子の量子化の一般化で与えられるが，ゲージ不変性という性質が現れるため議論は少し複雑になる．

真空中の Maxwell の電磁場を記述するラグランジアン密度は，4 個の電磁ポテンシャル $A_\mu(x) = A_\mu(t,x)$, $\mu = 0,1,2,3$ を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\sum_{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_n A_\mu(x))(\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^n A^\mu(x)) \\ &\equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\vec{E}^2 - \vec{B}^2] \qquad (3.1.1)\end{aligned}$$

のように書かれる．ただし，本書では同じ添え字が重複して現れるときにはその添え字に関して和をとるという規約を用いることにする．また現在の時空間の計量は $g_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$ である．電磁場のテンソル $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ と電場

$\vec{E}$ および磁場 $\vec{B}$ を表す変数は次のように関係している

$$\vec{E} = (F_{01}, F_{02}, F_{03}), \quad \vec{B} = (-F_{23}, -F_{31}, -F_{12}). \tag{3.1.2}$$

また電磁場のテンソル $F_{\mu\nu}$ は，次のゲージ変換(すなわち，変数の置き換え)

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \omega(x) \tag{3.1.3}$$

の下で形を変えない，$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$，すなわち不変であることが確かめられる．ここで $\omega(x) = \omega(t, \vec{x})$ は任意の関数であり，$\omega(x)$ の自由度は**ゲージ自由度**と呼ばれる．したがって，$A_\mu(x)$ のうちの少なくとも 1 個は $\omega(x)$ を適当に選べば任意に調整できることがわかる．このゲージ自由度を使って，$A_\mu(x)$ に制約を加えて自由度の数を減らすことを，**ゲージを固定する**という．この制約自身はゲージ条件と呼ばれ，ゲージ条件の選び方はかなり自由であるが，つぎの Coulomb ゲージ条件と呼ばれる $A_\mu(x)$ の空間成分に対する制約

$$\partial_k A_k(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial^k} A_k(x) = 0 \tag{3.1.4}$$

は基本的である．Landau(あるいは Lorentz)ゲージ条件と呼ばれる Lorentz 不変性を損なわない条件

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \tag{3.1.5}$$

もよく用いられる．この他にも，Weyl 条件と呼ばれることがある制約

$$A_0(x) = 0 \tag{3.1.6}$$

も，理論的考察には便利である．

ここでは，Coulomb ゲージを用いて議論を進めることにする．Coulomb ゲージでは，Maxwell の作用(ラグランジアンの時間と空間にわたる積分)は部分積分を行うと

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\int d^4x \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x A_\nu (\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu) \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x (A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^0 A_0 \partial_0 A^0) \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x (-\partial_\mu A_k \partial^\mu A^k + A_0 \partial_k \partial^k A^0) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

のように書かれる．したがって，時間成分 $A_0$ に関する変分から得られる真空

中の運動方程式は

$$\partial_k \partial^k A^0 = -\Delta A_0(x) = 0 \qquad (3.1.8)$$

となる．ここで $\Delta = \sum_{k=1}^{3} (\partial_k)^2$ はラプラシアンと呼ばれる．この式から $A_0 = 0$ となることがわかる．

したがって，ラグランジアン密度は（現在の空間の計量は $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ であることを考慮すると）

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_k \partial^\mu A^k = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2}\partial_\mu A_k \partial^\mu A_k \qquad (3.1.9)$$

で与えられ，運動方程式は $\partial_\mu \partial^\mu A_k(x) = 0$ である．共役運動量は

$$\Pi_k = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_k}\mathcal{L} = \frac{1}{c^2}\dot{A}_k \qquad (3.1.10)$$

であり，ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 [\sum_{k=1}^{3} \Pi_k \dot{A}_k - \mathcal{L}] \\ &= \sum_{k=1}^{3} \int d^3 \frac{1}{2}[c\Pi_k(x) c\Pi_k(x) + \sum_{l=1}^{3} \partial_l A_k \partial_l A_k] \end{aligned} \qquad (3.1.11)$$

となる．ただし，$\dot{A}_k = \partial A_k / \partial t$ を表す．

Coulomb ゲージ条件，$\partial^k A_k = \partial^k \Pi_k = 0$，を考慮して

$$\vec{A}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3 k \sqrt{\hbar c}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} [\vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k}) a_{\vec{k}\lambda}(0) e^{-ikx} + \vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k}) a_{\vec{k}\lambda}(0)^\dagger e^{ikx}] \qquad (3.1.12)$$

のように平面波の完全系で展開する．ただし，$k_0 = |\vec{k}|$ であり，$\vec{k}\vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k}) = 0$ を満たす偏極を表すベクトル $\vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k})$ としては，運動量が $z$ 軸の正の方向に向いているとき

$$\begin{aligned} &\vec{e}^{\,(1)}(\vec{k}) = (1, 0, 0), \quad \vec{e}^{\,(2)}(\vec{k}) = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, |\vec{k}|) \\ &e_l^{(1)}(\vec{k}) e_m^{(1)}(\vec{k}) + e_l^{(2)}(\vec{k}) e_m^{(2)}(\vec{k}) = \delta_{lm} - k_l k_m / (\vec{k})^2 \end{aligned} \qquad (3.1.13)$$

のように選び，一般の $\vec{k}$ に対してはこの表式を回転して定義する．

このとき共役運動量は

$$c\vec{\Pi}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k\sqrt{\hbar c}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} i|\vec{k}|[-\vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k})a_{\vec{k}\lambda}(0)e^{-ikx} + \vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k})a_{\vec{k}\lambda}(0)^\dagger e^{ikx}] \tag{3.1.14}$$

であり，ハミルトニアン (3.1.11) は $\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$ として（形式的に運動量が離散的として）

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{2}\hbar\omega(\vec{k})\{a^\dagger_{\vec{k}\lambda}a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda}a^\dagger_{\vec{k}\lambda}\} \tag{3.1.15}$$

で与えられる．このハミルトニアンから光の波動は無限個の調和振動子の集合と同等であることがわかる．ただし，$\vec{k}\vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k}) = 0$ の関係から光は進行方向に直角な 2 つの方向 $\lambda = 1, 2$ に偏極している横波である．量子化条件はしたがって

$$\begin{aligned} &[a_{\vec{k}\lambda}, a^\dagger_{\vec{l}\rho}] = \delta_{\vec{k},\vec{l}}\,\delta_{\lambda\rho}, \\ &[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{l}\rho}] = [a^\dagger_{\vec{k}\lambda}, a^\dagger_{\vec{l}\rho}] = 0 \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

により与えられ

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega(\vec{k})\left\{a^\dagger_{\vec{k}\lambda}a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2}\right\} \tag{3.1.17}$$

のように書かれ，（0 点振動を無視すると）各平面波が持つエネルギーは，

$$\hbar\omega(\vec{k}) = \hbar c|\vec{k}| \tag{3.1.18}$$

で与えられる．また Heisenberg の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_{\vec{k}\lambda} &= \frac{i}{\hbar}[H, a_{\vec{k}\lambda}] = -i\omega a_{\vec{k}\lambda} \\ \frac{d}{dt}a_{\vec{k}\lambda}{}^\dagger &= \frac{i}{\hbar}[H, a_{\vec{k}\lambda}{}^\dagger] = i\omega a_{\vec{k}\lambda}{}^\dagger \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

を与え，一般の時間での演算子は (3.1.12) の $A_k(x)$ の式からもわかるように

$$a_{\vec{k}\lambda}(t) = a_{\vec{k}\lambda}(0)e^{-i\omega t}, \quad a_{\vec{k}\lambda}{}^\dagger(t) = a_{\vec{k}\lambda}{}^\dagger(0)e^{i\omega t} \tag{3.1.20}$$

のような時間依存性を持つことになる．

Fock 空間表示での光子の状態ベクトルは

$$\begin{aligned} &|n_1(\vec{k}_1, \lambda_1), n_2(\vec{k}_2, \lambda_2), n_3(\vec{k}_3, \lambda_3), \cdots\rangle \\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{n_1!}}\frac{1}{\sqrt{n_2!}}\frac{1}{\sqrt{n_3!}}\cdots\right\}(a^\dagger_{\vec{k}_1\lambda_1})^{n_1}(a^\dagger_{\vec{k}_2\lambda_2})^{n_2}(a^\dagger_{\vec{k}_3\lambda_3})^{n_3}\cdots|0\rangle \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

で与えられ，運動量と偏極が $(\vec{k}_1, \lambda_1)$ の光子が $n_1$ 個，運動量と偏極が $(\vec{k}_2, \lambda_2)$ の光子が $n_2$ 個，… などの状態を表す．すなわち電磁波に付随した粒子である光子は Bose 粒子である．光子 1 個の状態を表す波動関数は

$$\langle 0|\vec{A}(x)a^{\dagger}_{\vec{k}\lambda}(0)|0\rangle = \frac{\sqrt{\hbar c}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}}\vec{e}^{\,(\lambda)}(\vec{k})e^{-ikx} \tag{3.1.22}$$

で与えられる．

消滅と生成演算子から逆に座標と運動量を

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}\lambda} &= i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega(\vec{k})}}p_{\vec{k}\lambda} + \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}}q_{\vec{k}\lambda} \\ a^{\dagger}_{\vec{k}\lambda} &= -i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega(\vec{k})}}p_{\vec{k}\lambda} + \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}}q_{\vec{k}\lambda} \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

により導入すると電磁場のハミルトニアンは

$$H = \sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{2}\{p^2_{\vec{k}\lambda} + \omega^2(\vec{k})q^2_{\vec{k}\lambda}\} \tag{3.1.24}$$

と書くことができる．

## 3.2 電磁場の経路積分による量子化

自由な電磁場は無限個の調和振動子の集合体と同等である．電磁場は 2 つの独立な横波成分を含むので，経路積分表示は自由なスカラー場 (2.3.18) が 2 個の場合と同等になり暫定的に (3.1.9) を用いて

$$\langle \vec{A}_f(\vec{x}), t_f|\vec{A}_i(\vec{x}), t_i\rangle = \int\prod_{k=1}^{3}[\mathcal{D}A_k]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int\frac{1}{2}\partial_\mu A_k\partial^\mu A^k d^4x\right] \tag{3.2.1}$$

と書かれる．ここで場の変数には，Coulomb ゲージの条件 $\partial^k A_k(x) = 0$ を満たすという制約が付いている．

一般に Coulomb ゲージ条件を課すということは，ゲージポテンシャルの 3 個の空間成分 $A_k(x)$ を

$$\{A^{(1)}_k(x), A^{(2)}_k(x), \partial_k\omega(x)\} \tag{3.2.2}$$

のように，直交する 2 つの横波成分 $\partial^k A_k^{(i)}(x) = 0,\ i = 1, 2,$ とゲージ自由度 $\partial_k \omega(x)$ の 3 つに分解することと理解される．このように書いた $A_k(x)$ を無限小だけ変化させたときの "関数空間の長さ" は

$$
\begin{aligned}
||\delta A_k||^2 &\equiv \int d^4x \{ \sum_{k=1}^{3} [\delta A_k^{(1)}(x)^2 + \delta A_k^{(2)}(x)^2 + \partial_k \delta\omega(x) \partial_k \delta\omega(x)] \} \\
&= \int d^4x \{ \sum_{k=1}^{3} [\delta A_k^{(1)}(x)^2 + \delta A_k^{(2)}(x)^2] + \delta\omega(x)(-\Delta)\delta\omega(x) \}
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

で定義される．一般相対論において長さが $d^2s = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ で与えられるとき体積要素が $dV = \sqrt{g}d^4x$ で与えられることの一般化として，関数空間の体積要素は

$$
\prod_{k=1}^{3} \mathcal{D}A_k = \sqrt{\det[-\Delta\delta(x-y)]} \prod_{i=1}^{2} \mathcal{D}A_k^{(i)} \mathcal{D}\omega \tag{3.2.4}
$$

で与えられる．またこの分解においては $\delta(\partial^l A_l) = \delta(\partial^l \partial_l \omega) = \delta(\omega)/\det(-\Delta)$ が成立する．この関係式は，普通の関数に対して成立する $\delta(f) = \delta(x - x_0)/|f'(x_0)|$ の関数空間への一般化である．ただし，$f(x_0) = 0$ とする．

これらの関係式を用いると

$$
\prod_{k=1}^{3} \mathcal{D}A_k \delta(\partial^l A_l) \det[-\Delta\delta^4(x-y)]^{1/2} = \prod_{i=1}^{2} \mathcal{D}A_k^{(i)} \mathcal{D}\omega\delta(\omega) = \prod_{i=1}^{2} \mathcal{D}A_k^{(i)}
\tag{3.2.5}
$$

が成立する．(3.2.5) の右辺を考慮すると，経路積分 (3.2.1) は正確には

$$
\begin{aligned}
&\langle A_k^f, t_f | A_k^i, t_i \rangle \\
&= \int \prod_{k=1}^{3} \mathcal{D}A_k \delta(\partial^l A_l) \det[-\Delta\delta^4(x-y)]^{1/2} \\
&\quad \times \exp\{-\frac{i}{\hbar} \int d^3 \frac{1}{2} [\partial_\mu A_k(x) \partial^\mu A^k(x)]\}
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

と書くことができることがわかる．

この経路積分を Lorentz 共変な形に書き換えるために，Bose 場 $B(x)$ を用いると一般の(エルミートな)微分演算子 $O(x, y)$ に対して

$$(\det [O(x,y)])^{-1/2} = N \int \mathcal{D}B \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x d^4y \frac{1}{2} B(x)O(x,y)B(y)\right] \tag{3.2.7}$$

が成立することに注意する．$N$ は適当な規格化因子である．この等式が成立することは，

$$\int d^4y O(x,y)\varphi_n(y) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad \int d^4x \varphi_n(x)\varphi_m(x) = \delta_{nm} \tag{3.2.8}$$

となるような固有関数系 $\varphi_n(x)$ を選んで

$$B(x) = \sum_n b_n \varphi_n(x) = \sum_n b_n \langle x|n\rangle \tag{3.2.9}$$

のように展開すると経路積分は，$J$ をヤコビアンとして $\mathcal{D}B = \det[\langle x|n\rangle]\prod_n db_n = J\prod_n db_n$ が成立するので

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}B \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x \frac{1}{2} BOB\right] &= J\prod_n \int db_n \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_n \lambda_n b_n^2\right] \\ &= N(\prod_n \lambda_n)^{-1/2}\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

を与える．ただし $N$ は規格化因子であり，この積分は Fresnel 積分と呼ばれるものの一般化である．他方 $\det O = \prod_n \lambda_n$ で定義されるので上記の等式 (3.2.7) が成立するわけである．

この関係式で，$O(x,y) = -\Delta\delta^4(x-y)$，$B(x) = A_0(x)$ としたものを上記の経路積分の式 (3.2.6) で用いると，(Coulomb ゲージでのラグランジアン密度の変形を逆にたどって) 自由な電磁場の経路積分表示

$$\begin{aligned}&\langle A_k^f, t_f | A_k^i, t_i\rangle \\ &= \int \prod_{k=1}^{3} \mathcal{D}A_k \delta(\partial^l A_l)\mathcal{D}A_0 \det[-\Delta\delta^4(x-y)] \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4 \frac{1}{2}[-\partial_\mu A_k(x)\partial^\mu A^k(x) + A_0\partial_k\partial^k A^0]\right\} \\ &= \int \prod_{\mu=0}^{3} \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial^l A_l)\det[\Delta\delta^4(x-y)]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]\right\}\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

が最終的に得られる．

この最後の経路積分の公式 (3.2.11) を一般的な観点から見直してみる．まず一般のゲージ場の変数 $A_\mu$ は，$\partial^k \bar{A}_k = 0$ を満たす $\bar{A}_\mu$ から出発してパラメター $\omega(x)$ で指定されるゲージ変換を行ったもので書けること

$$A_\mu(x) \equiv A_\mu^\omega(x) = \bar{A}_\mu(x) + \partial_\mu \omega(x) \tag{3.2.12}$$

および

$$\frac{\delta \partial^k A_k^\omega(x)}{\delta \omega(y)} = \frac{\delta \partial^k \partial_k \omega(x)}{\delta \omega(y)} = \partial^k \partial_k \delta^4(x-y) \tag{3.2.13}$$

となることに注意すると，経路積分の測度は*1

$$d\mu = \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu^\omega \delta(\partial^l A_l^\omega) \det \left[ \frac{\delta \partial^k A_k^\omega(x)}{\delta \omega(y)} \right] \tag{3.2.14}$$

で与えられていることがわかる．この行列式は $\partial^l A_l^\omega$ から $\omega$ への変数変換のヤコビアンと見なされるので，

$$\begin{aligned} d\mu \mathcal{D}\omega &= \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu^\omega \delta(\partial^l A_l^\omega) \det \left[ \frac{\delta \partial^k A_k^\omega(x)}{\delta \omega(y)} \right] \mathcal{D}\omega \\ &= \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu^\omega \delta(\partial^l A_l^\omega) \mathcal{D}(\partial^l A_l^\omega) \\ &= \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu^\omega \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

が成立する．この等式は $A_\mu^\omega$ の任意の汎関数をかけて積分するとき同じ答えを与えるという意味である．すなわち $d\mu \mathcal{D}\omega$ で積分することは制約なしの積分 $\prod_\mu \mathcal{D}A_\mu^\omega$ に等しいことを示しており，一般の経路積分の測度は模式的に

$$d\mu = \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu / \mathcal{D}\omega \tag{3.2.16}$$

と書かれ，測度 $d\mu$ は(制約なしの)全関数空間にわたる測度 $\prod_\mu \mathcal{D}A_\mu$ をゲージ自由度にわたる測度 $\mathcal{D}\omega$ で割ったもので定義される．

---

*1　制約を付けていない一般のゲージ場変数に関しては経路積分の測度はゲージ不変，すなわち，$\mathcal{D}A_\mu^\omega = \mathcal{D}A_\mu$ が成立する．ゲージ変換は一般に関数空間での並進と回転に対応するからである．しかし，変数 $\bar{A}_\mu$ には $\partial^k \bar{A}_k = 0$ という制約が付いているので，$\mathcal{D}A_\mu^\omega = \mathcal{D}\bar{A}_\mu$ は成立しない．

この模式的に書かれた公式 (3.2.16) からわかるように，ゲージ理論の積分の測度はゲージ条件に依存せず一般的に定義されている．したがって，例えば，Landau ゲージ条件 (3.1.5) に対しては経路積分の測度は

$$
\begin{aligned}
d\mu &= \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu^\omega \delta(\partial^\mu A_\mu^\omega) \det\left[\frac{\delta\partial^\mu A_\mu^\omega(x)}{\delta\omega(y)}\right] \\
&= \prod_\mu \mathcal{D}A_\mu^\omega \delta(\partial^\mu A_\mu^\omega) \det\left[\partial^\mu\partial_\mu\delta(x-y)\right]
\end{aligned}
\qquad (3.2.17)
$$

で与えられる．

この一般的なゲージ理論の経路積分の測度 (3.2.14) あるいは (3.2.17) は，Faddeev-Popov のゴースト場 $c(x)$ と反ゴースト場 $\bar{c}(x)$ と呼ばれる実の場，$c(x)^\dagger = c(x)$，$\bar{c}(x)^\dagger = \bar{c}(x)$，を用いて使いやすい形に定式化される．$c(x)$ と $\bar{c}(x)$ はスピンを持たない Fermi 粒子を表し，スピンと統計の関係を満たさないことからわかるように，負の確率（あるいは不定計量）を持つ非物理的な粒子である．第 2 章で説明したように，経路積分では Fermi 粒子を表す場は互いに反交換する Grassmann 数で表示される．一般の（エルミートな）微分演算子 $O(x,y)$ に対して

$$
\det\, O(x,y) = N\int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4xd^4y - i\bar{c}(x)O(x,y)c(y)\right] \qquad (3.2.18)
$$

が成立する．ただし，$N$ は適当な規格化因子である．この証明はすでに説明した Bose 場の場合と同様であり，

$$
\int d^4yO(x,y)u_n(y) = \lambda_n u_n(x), \qquad \int d^4xu_n(x)u_m(x) = \delta_{nm},
$$
$$
c(x) = \sum_n c_n u_n(x), \qquad \bar{c}(x) = \sum_n \bar{c}_n u_n(x)
$$
$$
(3.2.19)
$$

のように完全系 $\{u_n(x) = \langle x|n\rangle\}$ を用いて展開し

$$
\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} = [\det\,\langle x|n\rangle]^{-2}\prod_n dc_n d\bar{c}_n \qquad (3.2.20)
$$

に注意すると，$N$ を適当な規格化因子として

$$\int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4xd^4y(-i)\bar{c}(x)O(x,y)c(y)\right]$$
$$= [\det\langle x|n\rangle]^{-2}\prod_n dc_n d\bar{c}_n \exp\left[\frac{1}{\hbar}\sum_n \bar{c}_n\lambda_n c_n\right]$$
$$= N\prod_n \lambda_n = N\det\ O(x,y) \tag{3.2.21}$$

が示されるからである．ここで Grassmann 数 $\{c_n, \bar{c}_n\}$ に関する積分は微分で定義されることを用いた．

$O(x,y) = -\Delta\delta^4(x-y)$ の場合に上の公式を適用すると，電磁場の Coulomb ゲージを用いた経路積分は

$$\int\prod_{\mu=0}^{3}\mathcal{D}A_\mu\delta(\partial^l A_l)\det[-\Delta\delta^4(x-y)]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\frac{-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]$$
$$= \int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left[\frac{-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B(x)\partial^l A_l + i\bar{c}\Delta c(x)\right]\right\} \tag{3.2.22}$$

で与えられ，Landau ゲージの場合は

$$\int\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left[\frac{-1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B(x)\partial^\mu A_\mu - i\bar{c}\partial^\mu\partial_\mu c(x)\right]\right\} \tag{3.2.23}$$

で与えられる．ただし $\mathcal{D}A_\mu$ は全関数空間にわたる測度である．また $\delta(x) = \int\frac{dy}{2\pi}e^{ixy}$ の一般化としての関係

$$\delta(\partial^\mu A_\mu) = \int\mathcal{D}B\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4xB(x)\partial^\mu A_\mu(x)\right] \tag{3.2.24}$$

を用いた．このようにゲージ固定項に現れる実のBose 的な補助場 $B(x)$ は中西–Lautrap 場と呼ばれている．

以上のゲージ理論の測度の定義式は **Faddeev-Popov の公式**と呼ばれ，非 Abel 的なゲージ理論(Yang-Mills 場)に対しても一般相対論の量子化とか弦理論(の第一量子化)に対しても成立することが知られている．この定式化の重要な性質として，例えば，Landau ゲージに対する有効ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B(x)\partial^\mu A_\mu - i\bar{c}\partial^\mu\partial_\mu c(x) \tag{3.2.25}$$

は，Grassmann 的な実の定数 $\lambda$ を用いて次式で定義される

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= i\lambda\partial_\mu c(x), \\ \delta c(x) &= 0, \\ \delta\bar{c}(x) &= \lambda B(x), \\ \delta B(x) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

BRST(Becchi-Rouet-Stora-Tyutin) 変換の下で不変となることがある．BRST 対称性は一般に $i\lambda c(x)$ をゲージパラメターとするゲージ変換と見なされる．この BRST 対称性は非 Abel 的な群（ちなみに，電磁場は Abel 的な $U(1)$ 群に属するゲージ場である）に属するゲージ場，すなわち，Yang-Mills 場とか重力場の量子論におけるくり込みの議論および理論のユニタリー性（Fock 空間の計量が正定値であり確率の保存が成立すること）の証明に，基本的な役割を果たすことが知られている．この BRST 対称性は $\xi$ ゲージと呼ばれる（負でない定数 $\xi$ を用いた）ゲージ固定

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B(x)\partial^\mu A_\mu - i\bar{c}\partial^\mu\partial_\mu c(x) + \frac{\xi}{2}B^2 \tag{3.2.27}$$

でも成立している．この $\xi$ ゲージも，（ここでは説明は省略するが）物理的には同じ結果を導くことが知られている．

## 3.3 光子の位相演算子と指数

ここまで電磁場の量子論の基礎を復習してきた．この節では光子の位相演算子に関係した問題を議論したい．この考察は 1927 年の Dirac による電磁場の最初の量子化に遡る問題であり，量子力学に現れる Hilbert 空間の計量が正定値であることの重要な帰結を理解する上でも重要である．また，粒子数と位相の不確定性関係，すなわち，位相が定まれば粒子数が不定になるという関係式は一般的には成立しないという事実にも関係している．この分析には指数という概念が中心的な役割を果たし，後に議論するカイラル量子異常と数学的には密接に関係している．この光子の位相演算子の議論には対称性とか Noether カ

レントといった場の理論における量子異常の分析で中心的な役割を果たす概念は現れないが，量子論で負の確率が現れないという要請と指数概念が素朴な古典・量子対応から予想される結果とは反する結論に導くという意味で，広義の量子異常と見なされる．いずれにしても，指数という重要な概念を調和振動子の量子力学を通じて学ぶことができるのは貴重である．

真空中の電磁場の量子化は無限個の調和振動子の問題に帰着することを前節で見てきた．したがって，以下では

$$H = \frac{1}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger) \tag{3.3.1}$$

で記述される $\omega = 1$ の一つのモードに限定したハミルトニアンを考えることにする．規格化された真空状態，$\langle 0|0\rangle = 1$，は $a|0\rangle = 0$ で定められる．この条件の下では負の計量(あるいは，負の確率)は現われない．このことは，例えば，一光子状態 $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$ に対しては

$$\begin{aligned}\langle 1|1\rangle &= \langle 0|aa^\dagger|0\rangle = \langle 0|aa^\dagger - a^\dagger a|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle = 1\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

からわかる．光子数の演算子 $N = a^\dagger a$ の一般の固有ベクトルは，Fock 空間の表示では

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{k!}}(a^\dagger)^k|0\rangle \tag{3.3.3}$$

で与えられ

$$\begin{aligned}N|k\rangle &= k|0\rangle \\ \langle k|l\rangle &= \delta_{k,l}, \quad k,l = 1,2,3,\cdots\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

の関係を満たす．この表現においては，ブラ $\langle k|$ およびケット $|k\rangle$ 状態を用いて，消滅演算子 $a$ は

$$a = |0\rangle\langle 1| + \sqrt{2}\,|1\rangle\langle 2| + \sqrt{3}\,|2\rangle\langle 3| + \cdots \tag{3.3.5}$$

のように Hilbert 空間のあるベクトルをもう一つのベクトルに写す無限次元のマトリクスで表すことも可能である．生成演算子 $a^\dagger$ は，

$$a^\dagger = (a)^\dagger = |1\rangle\langle 0| + \sqrt{2}\,|2\rangle\langle 1| + \sqrt{3}\,|3\rangle\langle 2| + \cdots \tag{3.3.6}$$

と表示される．

さて，光を記述する電磁ポテンシャルの空間成分 $\vec{A}(t,\vec{x})$ は，実の場で $\vec{A}^\dagger = \vec{A}$ の関係を満たし，$\vec{A}$ そのものには，位相という概念はない．したがって，光(あるいは，光子)の位相とか位相演算子という概念は，Hilbert 空間の複素状態ベクトルとの関連で定義される．歴史的には，1927 年の Dirac による光の量子論の最初の論文にならって，

$$a = e^{i\phi}\sqrt{N} \tag{3.3.7}$$

によって，位相 $\phi$（あるいは，量子化すると位相演算子）を定義する．$(a, a^\dagger)$ から調和振動子の変数 $(p, q)$ へ変数変換すると

$$p = \sqrt{N}\cos\phi, \quad q = \sqrt{N}\sin\phi \tag{3.3.8}$$

となり，古典解析力学における Liouville 測度 $dpdq = dNd\phi$ の不変性から，$(N, \phi)$ の組が正準変数とみなされる．したがって，Poisson 括弧は $\{q, p\}_{PB} = 1$ から

$$\{N, \phi\}_{PB} = 1 \tag{3.3.9}$$

が結論され，量子論的には

$$[N, \phi] = i \tag{3.3.10}$$

となることが予想される．Dirac は光子の概念，すなわち光の量子化を，物理的な描像としては，角変数 $\phi$ の $2\pi$ 周期に対応する正準共役な変数 $N$ の整数への量子化により説明した．また，上記の $N$ と $\phi$ 交換関係から有名な不確定性関係

$$\Delta N \Delta\phi \geqq \frac{1}{2} \tag{3.3.11}$$

が導かれる．すなわち，光子数 $N$ が決まると位相 $\phi$ は不確定になり，位相 $\phi$ が決まると光子数が不確定になる．以上の議論からわかるように，光の「位相」という概念は，$e^{i\phi}$ を状態ベクトルに作用させるかあるいは状態ベクトルで期待値(平均値)をとって定義される．状態ベクトルは常に(光のような実の場に対しても，あるいは一般の複素場に対しても)複素数なので，位相という概念はすべての場とか粒子に対して定義される．素朴には，位相演算子は粒子数に対して共役な変数として定義される．

## 3.4 エルミートな位相演算子は存在するか？

光の位相演算子に関しては，厳密な意味でのエルミートな位相演算子は存在しないことが知られている．Dirac に従って

$$a \equiv e^{i\varphi}\sqrt{N} \tag{3.4.1}$$

と定義すると(一般の位相演算子 $\varphi$ をエルミートであると想定したこれまでの $\phi$ とは区別して)，

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= a(N)^{-\frac{1}{2}} = (N+1)^{-\frac{1}{2}}a \\ &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + \cdots \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

と書くことができる．この第二の表式からわかるように，$N$ がゼロか正に限定された負の計量が出ない空間で議論する限り，位相演算子 $\varphi$ に付随した以下で議論される問題点は，極表示(複素数を $z = re^{i\theta}$ と書くことの一般化)が原点で厳密に定義されないということとは無関係であることがわかる．上記の位相演算子 $e^{i\varphi}$ (3.4.2) に対しては

$$e^{i\varphi}(e^{i\varphi})^\dagger = 1, \quad (e^{i\varphi})^\dagger e^{i\varphi} = 1 - |0\rangle\langle 0| \tag{3.4.3}$$

が確かめられる．すなわち，$\varphi$ はエルミートな演算子としては定義されない．(もし，$\varphi$ がエルミートな演算子なら $e^{i\varphi}(e^{i\varphi})^\dagger = (e^{i\varphi})^\dagger e^{i\varphi} = 1$ が成立するはずである)．

しかし，多くの人達が“より自然な”エルミートな位相演算子 $\phi$ の定義を探求した．これらの試みの中では，D. T. Pegg と S. M. Barnett による演算子が有名である．彼らの基本的な考えは，光子数の Fock 空間を $s$ 個の光子で切断して考えることにある．すなわち，光子数の空間を

$$|0\rangle,\ |1\rangle,\ |2\rangle,\ \cdots, |s\rangle \tag{3.4.4}$$

の $s+1$ 次元の空間に切断して考え，後で $s$ を任意に大きくすることを考える．この場合には，位相演算子 $\phi$ を($\phi_0$ を任意の定数として)

$$e^{i\phi} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + \cdots + |s-1\rangle\langle s| + e^{i(s+1)\phi_0}|s\rangle\langle 0| \tag{3.4.5}$$

と定義すると，

$$e^{i\phi}(e^{i\phi})^\dagger = (e^{i\phi})^\dagger e^{i\phi} = 1 \tag{3.4.6}$$

が確かめられ，確かに $e^{i\phi}$ はユニタリーな演算子を与えることがわかる．この構成法では，$s+1$ 次元の Fock 空間での消滅演算子は，

$$\begin{aligned} a_s &\equiv e^{i\phi}\sqrt{N} \\ &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2|\sqrt{2} + \cdots + |s-1\rangle\langle s|\sqrt{s} \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

と定義され，$a_s^\dagger = (a_s)^\dagger$ と定めると

$$[a_s, a_s^\dagger] = 1 - (s+1)|s\rangle\langle s| \tag{3.4.8}$$

という少し変形された交換関係を満たすことがわかる．これから

$$a_s a_s^\dagger |s\rangle = 0 \tag{3.4.9}$$

が成立することも確かめられる．

いずれにしても，もし $s$ を充分大きくとったときに，状態 $|s\rangle$ の効果が効かないことが示されれば，エルミートな位相演算子が定義できることになる．

## 3.5　調和振動子の指数定理と量子異常

上記の位相演算子の問題を指数という概念を用いて分析し，位相演算子の異常な振る舞いは，後に議論する量子異常(quantum anomaly)と密接に関係していることを示したい．まず，調和振動子の通常の表現は

$$\dim \ker a - \dim \ker a^\dagger = 1 \tag{3.5.1}$$

という指数の関係式を満たす．ここで，dim ker という記号は，演算子 $a$ の核(kernel)の次元(dimension)という意味である．すなわち，dim ker $a$ は，

$$au_n = 0 \tag{3.5.2}$$

という関係を満たす規格化可能な状態 $u_n$ の数を意味する．上記の例では，

$$\ker a = \{|0\rangle\}, \quad \ker a^\dagger = 空集合 \tag{3.5.3}$$

となり，核の次元は 1 と 0 になり，上の指数関係が満たされる．指数関係はまた，

$$\dim \ker a^\dagger a - \dim \ker aa^\dagger = 1 \tag{3.5.4}$$

とも，あるいはトレースを用いて

$$\mathrm{Tr}\,(e^{-a^\dagger a}) - \mathrm{Tr}\,(e^{-aa^\dagger}) = 1 \tag{3.5.5}$$

とも書くことができる．$a^\dagger a$ を用いた表現 (3.5.4) と (3.5.1) の同等性は，$au=0$ なら $a^\dagger au = 0$ であり，逆に $a^\dagger au = 0$ なら内積を考えて $(a^\dagger au, u) = (au, au) = 0$

であり，内積が正定値なら $au=0$ となることから結論される．トレースを用いた表現との同値性は，$a^\dagger a$ と $aa^\dagger$ は 0 でない固有値は全く同じ数だけ含んでいることから示される．すなわち，

$$a^\dagger a u_n = \lambda_n^2 u_n \tag{3.5.6}$$

で $\lambda_n \neq 0$ とすると，$v_n = au_n/\lambda_n$ と定義すれば

$$aa^\dagger v_n = \lambda_n^2 v_n \tag{3.5.7}$$

が結論され，$u_n$ と $v_n$ は 1 対 1 対応していることがわかる．したがって，トレース (3.5.5) の右辺には 0 固有値の差が現われる．具体的には，

$$\mathrm{Tr}\,(e^{-a^\dagger a}) - \mathrm{Tr}\,(e^{-aa^\dagger}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = 1 \tag{3.5.8}$$

から確かめられる．この指数の概念は，指数が整数であることから，無限小のなめらかな変換の重ね合わせでは他の整数に飛び移ることができず一般に不変に保たれるという重要な性質がある．したがって，無限小のユニタリー変換の重ね合わせで生成される量子光学でよく知られた光のスクイージング（位相空間におけるある方向への圧縮）に対して不変に保たれる．

さて，もし Dirac のいうように，

$$a = e^{i\phi}\sqrt{N} = U(\phi)\sqrt{N} \tag{3.5.9}$$

と，ユニタリーな $U(\phi)$ を使って書けたとすると

$$a^\dagger a = N, \quad aa^\dagger = U(\phi) N U(\phi)^\dagger \tag{3.5.10}$$

すなわち，$a^\dagger a$ と $aa^\dagger$ はユニタリーに同値となり

$$\mathrm{Tr}\,(e^{-a^\dagger a}) - \mathrm{Tr}\,(e^{-aa^\dagger}) = \mathrm{Tr}\,(e^{-N}) - \mathrm{Tr}\,(e^{-UNU^\dagger}) = 0 \tag{3.5.11}$$

が結論され，上の指数関係と矛盾することになる．すなわち，ユニタリーな $U(\phi)$（あるいは，エルミートな $\phi$）は存在できない．他方，もし $a_s$ を任意の $s+1$ 次元の正方行列とすると，

$$\mathrm{Tr}_{(s+1)}(e^{-a_s^\dagger a_s}) - \mathrm{Tr}_{(s+1)}(e^{-a_s a_s^\dagger}) = 0 \tag{3.5.12}$$

が示される．ただし，$\mathrm{Tr}_{(s+1)}$ は $s+1$ 次元の空間にわたるものである．この関係式は，$a_s^\dagger a_s$ と $a_s a_s^\dagger$ は 0 でないすべての固有値を共有しており，$a_s^\dagger a_s$ と $a_s a_s^\dagger$ は有限次元なので 0 固有値も同じ数だけ含んでいることになり，結局すべての固有値が同じになり，指数が 0 になることが結論される．これから，任意の有限次元で正方行列に切断すれば，指数定理の意味では，エルミートな位相演算

子 $\phi$ が定義されても矛盾しないことになる．事実，Pegg と Barnett の演算子 (3.4.5) はこの例になっている．（ただし，この場合には，極表示の原点での特異性が現われる可能性がある．このことは，$a$ が 2 行 2 列のマトリクスで表示される Fermi 粒子にも当てはまる．）

次に重要な点は，$s$ を充分大きくしたときに，Pegg と Barnett の演算子は物理的な Fock 空間の中で指数関係を満たしながら通常の表現に近づくか否かという問題がある．このことは，一般には不可能であることは整数 0 と 1 が同等になれないことからも予想されるが，数学的には (3.5.12) の第 2 項を右辺に移項して両辺から同じ表式を引いて得られる式から

$$\mathrm{Tr}_{(s+1)}(e^{-a_s^\dagger a_s}) - \mathrm{Tr}_{(s)}(e^{-a_s a_s^\dagger}) = \mathrm{Tr}_{(s+1)}(e^{-a_s a_s^\dagger}) - \mathrm{Tr}_{(s)}(e^{-a_s a_s^\dagger}) = 1 \tag{3.5.13}$$

が結論される．ただし，$\mathrm{Tr}_{(s)}$ は $s+1$ 次元空間の最初の $s$ 次元の部分空間上のトレースを示す．したがって，この式の右辺は状態 $|s\rangle$ の寄与であり，$a_s$ の定義式から確かめられる $a_s a_s^\dagger|s\rangle = 0$ を考慮すると，右辺の指数 1 が現われる．この関係式で，$s$ を無限大にもってゆくと，左辺の各項はなめらかな極限を持つことが確かめられ，$s \to \infty$ では

$$\mathrm{Tr}\,(e^{-a^\dagger a}) - \mathrm{Tr}\,(e^{-aa^\dagger}) = 1 \tag{3.5.14}$$

という指数の関係式が導かれる．したがって，$s \to \infty$ の極限では，ユニタリーな位相因子は排除されることがわかる．すなわち，位相演算子 (3.4.5) の $s \to \infty$ の極限がなめらかであるとすると矛盾することになる．

上記のように，切断した空間では指数が 0 となり，切断のパラメタを無限大すると 0 でない指数が切断のパラメタ（例えば，格子ゲージ理論の格子間隔の逆数 $1/a$ とか Pauli–Villars の正則化の質量）の効果として現われる現象は，本書で以下に説明するように場の理論における量子異常と呼ばれるものの本質である．事実，上記のトレースを用いた指数 (3.5.8) の計算は（トレースを一般的に理解すると），後に説明するカイラル量子異常の数学的表現である Atiyah-Singer の指数定理と呼ばれるものと密接に関係している．

このことから，位相演算子の異常な振る舞いは，量子論では必然的にあらわれる量子異常の一例と見なされる．この観点からは，位相演算子の異常な振る舞いは量子論では，どのように定義しても避けることができないことが結論さ

れる．異常な振る舞いが必然的であるという事実の具体的な物理的表現としては，最小不確定性関係を矛盾なく表現できるか否かという問題がある．事実，異常な振る舞いを避けるかのように見える (3.4.5) のエルミートな演算子 $\phi$ を用いて測定データを分析するときには，（実験が不確定性関係の限界に達していても）最小不確定性からのずれは特徴的に量子論的な光子数の小さい状態では顕著になり，測定が量子限界に達しているか否か（すなわち，不確定性関係の限界に達しているか否か）を判定できないことが示される．

# 4 場の理論の正則化とカイラル対称性の量子的破れ

この章では量子電磁力学(QED)を例にとって場の理論の正則化を議論し，光子の質量が高次の量子効果を含めても0に保たれること，およびカイラル対称性の量子的破れ(量子異常)の計算の最も簡単な例を示す．Fermi粒子のループが1つのFeynman図の正則化が基本的になることを説明し，任意の理論に対して，ループが1つのFeynman図をゲージ不変性を損なわずに正則化する共変正則化の考えを説明する．カイラル量子異常はFeynman図とか摂動計算によらずに定義されることを示す．またカイラル量子異常を含む恒等式が高次の補正を受けないというAdler–Bardeenの定理の概要を説明する．

## 4.1 電流の保存則とWard–高橋の恒等式

まず，第1章で問題としたループが1つの光子の自己エネルギーに対応する量子補正から議論を始め，実際にゲージ不変性を保ち，したがって光の質量を0に保つ計算方法が存在することを説明する．出発点となるQEDのラグランジアンは，付録Aを参照して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{eff}} &= \bar{\psi} i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2M^2}(\partial_{\alpha}F_{\mu\nu})^2 \\
&\quad - \frac{1}{4M^4}(\partial_{\alpha}\partial_{\beta}F_{\mu\nu})^2 + iB\partial^{\mu}A_{\mu} - \partial^{\mu}\bar{c}\partial_{\mu}c \qquad (4.1.1)
\end{aligned}
$$

で与えられ，$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ である．このラグランジアンで $F_{\mu\nu}$ の微分を含む項は高階微分正則化と呼ばれる理論の正則化(すなわち発散の次数を下げる)のために導入した．質量の次元を持つ $M$ は運動量積分の切断のパラメターを与える．計算をする前に $M \to \infty$ という極限を考えると正則化されていない

QED のラグランジアンにもどる．最後の 2 項は Landau ゲージと呼ばれるゲージ条件を課すために導入したゲージ固定項と Faddeev-Popov のゴースト場の項である．

また記法を簡単にするために**自然単位系**

$$\hbar = 1, \quad c = 1 \tag{4.1.2}$$

を用いた．このときにはすべての量の次元は質量の次元 $[M]$ で表される．

$$\begin{aligned} &[m] = [M], \quad [x^\mu] = [M]^{-1}, \quad [\partial_\mu] = [M] \\ &[\psi] = [M]^{3/2}, \quad [A_\mu] = [M], \quad [e] = [M]^0 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

例えば，長さは Compton 波長 $\hbar/(mc) = 1/m$ と同じ次元をもち，電荷は $e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$ となり無次元である．また経路積分の指数の肩に載る作用積分が無次元でなくてはならない，ということから上記のように場の変数の(質量)次元が決まるわけである．

量子電磁力学の作用 (4.1.1) には，光の質量項

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} m_{\rm ph}^2 (A_\mu)^2 \tag{4.1.4}$$

は現れない．これは，この質量項は電磁場のゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \omega(x) \tag{4.1.5}$$

に対して形を変える，すなわち，ゲージ不変でないからである．また実験的にも光の質量は 0 とするのが妥当であり，このような質量項は最初のラグランジアンに現れないのみならず，高次の量子補正によって誘起されてはならない．量子電磁力学のようなゲージ理論においては，ゲージ不変性をいかに損なわずに摂動の各次数で計算を進めるかが基本的に重要になる．出発点になる電磁力学の作用がゲージ不変であるという性質を Green 関数の関係式に翻訳する重要な関係式は，Ward-高橋(WT)の恒等式と呼ばれる．まず源を付け加えた経路積分を

$$\begin{aligned} Z(J^\mu, \eta, \bar{\eta}) &\equiv \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\ \exp\left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_{\rm eff} + \mathcal{L}_J] \right\} \end{aligned}$$

$$\equiv \int d\mu \exp\left\{i\int d^4x[\mathcal{L}_{\rm eff}+\mathcal{L}_J]\right\} \tag{4.1.6}$$

のように書き直す．ここで源項

$$\mathcal{L}_J \equiv -A_\mu(x)J^\mu(x)+\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x) \tag{4.1.7}$$

を定義した．

ゲージ変換に関して出発点となる作用が不変であったことに起因する WT 恒等式は次の積分変数の変換（ゲージ変換）を考えることにより導かれる．

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \exp[i\alpha(x)]\psi(x),\\ \bar{\psi}(x)' &= \bar{\psi}(x)\exp[-i\alpha(x)]\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

このとき上の経路積分で次の恒等式が成立する．

$$\begin{aligned}&\int d\mu \exp\left\{i\int d^4x[\mathcal{L}_{\rm eff}(\bar{\psi},\psi,A_\mu,B,\bar{c},c)+\mathcal{L}_J(\bar{\psi},\psi,A_\mu)]\right\}\\ &\quad=\int d\mu' \exp\left\{i\int d^4x[\mathcal{L}_{\rm eff}(\bar{\psi}',\psi',A_\mu,B,\bar{c},c)+\mathcal{L}_J(\bar{\psi}',\psi',A_\mu)]\right\}\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

すなわち定積分では，積分変数の名前の付け替えは積分値そのものを変えないからである．この関係式で積分の測度は変数変換で不変であること（これは，第 5 章で正当化される）

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}=\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \tag{4.1.10}$$

および $\alpha(x)$ の一次の精度では

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\rm eff}(\bar{\psi}',\psi',A_\mu,B,\bar{c},c)=\mathcal{L}_{\rm eff}(\bar{\psi},\psi,A_\mu,B,\bar{c},c)-\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x),\\ &\mathcal{L}_J(\bar{\psi}',\psi',A_\mu)=\mathcal{L}_J(\bar{\psi},\psi,A_\mu)-i\alpha(x)\bar{\psi}(x)\eta(x)+i\alpha(x)\bar{\eta}(x)\psi(x)\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

が成立することに注意すると $\alpha(x)$ の一次の項を 3 つひろって，恒等式

$$\int d^4x\alpha(x)\langle\partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))-i\bar{\psi}(x)\eta(x)+i\bar{\eta}(x)\psi(x)\rangle_J=0 \tag{4.1.12}$$

が成立する．ただし，$\alpha(x)$ は局所的であること，すなわち，無限遠まで拡がっていない関数であるとして部分積分を行った．また一般の演算子 $\hat{O}(x)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle O(x)\rangle_J &\equiv \langle 0|\hat{O}(x)|0\rangle_J \\ &= \int d\mu O(x)\exp\left\{i\int d^4x[\mathcal{L}_{\rm eff}+\mathcal{L}_J]\right\}\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

を定義した．この記法は本書でよく用いる．

この恒等式で，$\alpha(x)$ をある $x^\mu$ の近傍で $\delta$ 関数的な山を持つものに選ぶと

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\rangle_J = i\langle\bar{\psi}(x)\eta(x)\rangle_J - i\langle\bar{\eta}(x)\psi(x)\rangle_J \tag{4.1.14}$$

が成立する．この式が WT 恒等式と呼ばれる基本的な関係式である．この WT 恒等式を $J^\nu(y)$ で 1 回偏微分して，すべての源を 0 におくと

$$\partial_\mu^x\langle T^*\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\nu(y)\rangle = 0 \tag{4.1.15}$$

が得られる．この最後の関係式の Fourier 変換は，最低次の摂動計算では図 4.1 のように，電流（カレント）$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ から電子と陽電子の対が現れ光子に消滅する振幅に運動量を掛けると 0 になることを示している．すなわち電流の保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$ を表している．

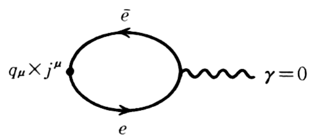



**図 4.1**　電流の保存則 (4.1.15) の Feynman 図

## 4.2　光の自己エネルギー

上記の WT 恒等式 (4.1.15) は，電流が光子の源であることを考慮すると，光の自己エネルギーに対する制約を与える．このことを，以下で説明したい．

実際の計算は Euclid 化した理論で行うので，Euclid 化した理論の定義から始める．Euclid 化の基本的な定義は座標の時間成分を

$$x^0 \to -ix^4 \tag{4.2.1}$$

と書き，$x^4$ を実の数とみなすことにある．同時に Dirac の $\gamma$ 行列でも

$$\gamma^0 = -i\gamma^4 \tag{4.2.2}$$

と定義する．$\gamma^0$ はエルミート的であったので，$\gamma^4$ は反エルミート的になり，

Euclid 理論では 4 個のすべての $\gamma$ 行列が反エルミート的 $(\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu$ になる．一般の反変ベクトル $V^\mu$ も Euclid 化したときは，$V^0 \to -iV^4$ と置き換える．また共変ベクトルは $A_4$ を実の量として，$A_0 \to iA_4$ と読み替える．したがって，ベクトル積 $V^\mu A_\mu$ は Euclid 化しても形を変えない．時空間の計量は $g_{\mu\nu} = (-1,-1,-1,-1)$ になる．

このとき Dirac の演算子は次のようになり形を変えない．

$$\begin{aligned} \not{D} &= \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) \\ &\equiv \gamma^4(\partial_4 - ieA_4) + \sum_{k=1}^{3}\gamma^k(\partial_k - ieA_k) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Dirac のスピナー $\psi$ の共役 $\bar{\psi}$ は，経路積分では $\psi$ とは独立に扱われているが，Euclid 化された Lorentz 変換(すなわち $SO(4)$ 変換)に関しては $\psi^\dagger$ のように変換されると理解できる．したがって Euclid 化した理論では次の内積の意味で $\not{D}$ はエルミート演算子となる．

$$(\Psi, \not{D}\Phi) = \int d^4x \Psi(x)^\dagger \not{D}\Phi(x) = (\not{D}\Psi, \Phi). \tag{4.2.4}$$

さて，Euclid 化した理論での経路積分は

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c\ \exp\left\{\int d^4x\{\mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_J\}\right\} \tag{4.2.5}$$

で与えられ，光子の自由な伝播関数は (4.1.1) で $A_\mu$ の 2 次の項をすべて考慮することにより，付録 (A.2.10) で $\xi = 0$ としたものを参照して運動量表示で

$$\begin{aligned} \int dx e^{ikx}\langle T^* A_\mu(x)A_\nu(0)\rangle &= \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2}{k^2(1-k^2/M^2)^2}, \\ \int dx e^{ikx}\langle T^* A_\mu(x)B(0)\rangle &= \frac{ik_\mu}{k^2} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

で与えられる．2 番目の伝搬関数は補助場に関するもので，現在の議論には必要でない．この伝搬関数(と付録 (A.2.9) の通常の Fermi 粒子の伝播関数)に基づく発散の次数の勘定から，Fermi 粒子のループが 1 つの Feynman 図以外はすべて有限かあるいは対数発散でありゲージ不変性と組み合わせるとすべて有限にできることが知られている．

このように，一般にゲージ理論では高階微分正則化を用いると，ループが 1

つの最低次の量子補正以外のすべての高次の量子補正を有限にできることが知られている．したがって，ループが1つの量子効果を有限にできればすべての量子効果が有限に計算できることになる．実際のゲージ理論の応用における摂動計算では，時空の次元を4より下げて発散を避ける「次元正則化」(dimensional regularization)が広く用いられている．しかし，われわれの主たる目的である量子異常の分析では，次元正則化は，目標としている対称性を壊すことになり適切ではない．たとえばカイラル対称性と呼ばれるものはDiracの$\gamma_5$を用いて定義されるが，次元が4から少しずれた理論では$\gamma_5$の矛盾のない定義は知られていない．

この理由で，任意の理論で量子異常が現れるか否かを判定するには，ループが1つのFeynman図をゲージ不変性を壊さずに正則化する処方が必要になる．この考え方では，もしゲージ対称性そのものが量子的に破れている場合にはどうするのかという疑問が生じるが，この場合には後に議論するようにBose対称性の考察と組み合わせて，やはりゲージ対称性に量子異常があるかないかの判定ができる．ループが1つのFeynman図をゲージ不変性を壊さずに正則化する処方を与えるのが，これから議論する共変正則化(covariant regularization)と呼ばれるものである．

まずラグランジアン(4.1.1)の中で，光の場$A_\mu$が結合している電流(あるいは一般にはカレントと呼ばれる)は

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{4.2.7}$$

で定義される．このカレントを次のように書きかえることを考える．

$$\begin{aligned}
\langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\rangle &= \lim_{y\to x}\langle T^*\overline{\psi}(y)\gamma^\mu\psi(x)\rangle \\
&= -\lim_{y\to x}\langle T^*\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)\overline{\psi}_\alpha(y)\rangle \\
&= \lim_{y\to x}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{1}{i\not{D}-m}\delta(x-y)\right]
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

ただし$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)$である．トレースはDiracの足に関するものである．ここでFermi粒子の場$\psi$が反交換することと，背景場として古典的な$c$数の電磁場$A_\mu(x)$があるときのFermi粒子のEuclid化した理論での伝搬関数

$$\langle T^*\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle = \frac{(-1)}{i\not{D}_x - m}\delta(x-y) \qquad (4.2.9)$$

を用いた．この式は (2.6.28) の規格化を正しく書いた経路積分を用いて

$$\begin{aligned}(i\not{D}_x - m)\langle T^*\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle &= \frac{1}{Z}\int d\mu(i\not{D}_x - m)\psi(x)\bar{\psi}(y)e^{S_{\text{eff}}} \\ &= \frac{1}{Z}\int d\mu(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}e^{S_{\text{eff}}})\bar{\psi}(y) \\ &= -\delta(x-y)\frac{1}{Z}\int d\mu e^{S_{\text{eff}}} = -\delta(x-y)\end{aligned} \qquad (4.2.10)$$

の両辺に $(i\not{D}-m)^{-1}$ を掛けて得られる．ただし最後の行への変形では部分積分を用いた．次に (4.2.8) の分母の因子を電荷 $e$ に関して展開すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\not{D}-m} &= \frac{1}{i\not{\partial}-m+e\not{A}} \\ &= \frac{1}{i\not{\partial}-m} + \frac{1}{i\not{\partial}-m}(-e\not{A})\frac{1}{i\not{\partial}-m} \\ &\quad + \frac{1}{i\not{\partial}-m}(-e\not{A})\frac{1}{i\not{\partial}-m}(-e\not{A})\frac{1}{i\not{\partial}-m} + \cdots\end{aligned} \qquad (4.2.11)$$

が得られる．この展開をカレントの式 (4.2.8) に代入し，場 $A_\nu(x)$ に関して 1 次の項のみを残すと

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{(-1)}{i\not{\partial}-m}\gamma^\nu eA_\nu(x)\frac{1}{i\not{\partial}-m}\delta(x-y)\right] \\ &= \lim_{y\to x}\int d^4z\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{(-1)}{i\not{\partial}-m}\delta(x-z)\gamma^\nu\frac{1}{i\not{\partial}-m}\delta(x-y)\right]eA_\nu(z)\end{aligned} \qquad (4.2.12)$$

が得られる．この式では微分 $\partial_\mu$ はそれより右側に現れるすべての $x$-変数に作用するものとする．この最後の式を $eA_\nu(z)$ に関して関数微分すると

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to x}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{(-1)}{i\not{\partial}-m}\delta(x-z)\gamma^\nu\frac{1}{i\not{\partial}-m}\delta(x-y)\right] \\ &= \lim_{y\to x}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{(-1)}{\not{k}+\not{q}-m}\gamma^\nu\frac{1}{\not{k}-m}\right]e^{-iq(x-z)}e^{-ik(x-y)}\end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-z)}(-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{1}{\not k + \not q - m}\gamma^\nu \frac{1}{\not k - m}\right]$$

$$\equiv \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-z)} \Pi^{\mu\nu}(q) \qquad (4.2.13)$$

が最終的に得られることになる．ただし，ここで次の $\delta$-関数の表示

$$\delta(x-z) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-z)}, \quad \delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \qquad (4.2.14)$$

および $\not k = \gamma^\mu k_\mu$ を用いた．ここで得られた $\Pi_{\mu\nu}(q)$ (4.2.13) は (A.2.9) の Fermi 粒子の伝播関数を 2 個含んでいることから予想できるように，通常の Feynman 則にしたがって求められる図 4.2 のループが 1 つの光の自己エネルギーと一致し，$\Pi_{\mu\nu}(q)$ は**真空の分極テンソル**と呼ばれるものを与える．

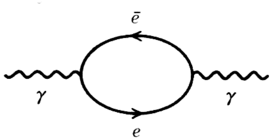



**図 4.2**　光子の自己エネルギー

すなわち，通常の摂動計算で $eA_\mu$ に関する展開により得られる複数個のカレント $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ に関する相関関数(これは Fermi 粒子のループが 1 つの Feynman 振幅に対応する)が，式 (4.2.8) をゲージ場 $eA_\mu$ に関して何回か関数微分することにより生成されるわけである．ここで重要なのは，$y = x$ の極限をループの運動量に関する積分を実行する前に取ることである．したがって，現在の計算法は，時空の点を少し離してカレントを正則化する時空点分離法(point-splitting)とは基本的に異なっている．

さて，ここで得られた真空分極のテンソル $\Pi_{\mu\nu}(q)$ (4.2.13) は $\not k = \gamma^\mu k_\mu$ なので運動量のべきの勘定からわかるように 2 次の発散をしている．ゲージ場の伝播関数の正則化 (4.2.6) は，現在の例ではゲージ場がループの中に現れないので発散の性質を改善しない．この発散を正則化することを考える．基本的な考え方は，任意のなめらかな関数 $f(x)$ で大きな $x$ で十分早く 0 に近づく

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0 \tag{4.2.15}$$

という条件を満たすものを考えて，出発点となったカレント (4.2.8) を

$$\langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\rangle_{\rm cov} \equiv \lim_{y\to x} {\rm Tr}\left\{\gamma^\mu \frac{1}{i\not{D}-m} f\left(\frac{\not{D}^2}{\Lambda^2}\right)\delta(x-y)\right\} \tag{4.2.16}$$

のように正則化することにある．計算を行う前に $\Lambda\to\infty$ という極限をとると，$f(0)=1$ なので正則化されていない出発点の表式 (4.2.8) にもどる．$\Lambda$ は，後にわかるように運動量の切断のパラメターを与える．ここで，Euclid 化した理論ではエルミート演算子となる

$$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) \tag{4.2.17}$$

を用いた．この演算子 $\not{D}$ はゲージ不変であり，常にこの組み合わせで微分演算子 $\partial_\mu$ とゲージ場 $eA_\mu$ を考えておけば，自動的にゲージ不変性が保証されるわけである．

具体的な計算では，例えば，

$$f(\not{D}^2/\Lambda^2) = \left(\frac{\Lambda^2}{\not{D}^2+\Lambda^2}\right)^2 \tag{4.2.18}$$

が便利であり，正則化されたカレントは

$$\langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\rangle_{\rm cov} = \lim_{y\to x} {\rm Tr}\left\{\gamma^\mu \frac{1}{i\not{D}-m}\left(\frac{\Lambda^2}{\not{D}^2+\Lambda^2}\right)^2\delta(x-y)\right\} \tag{4.2.19}$$

で与えられる．正則化されていないカレントの場合と同様に $eA_\mu$ のべきに展開し，$eA_\mu$ に関して 1 次の項のみを考えると[*1]

$$\begin{aligned}
&\langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\rangle_{\rm cov} \\
&= \lim_{y\to x} {\rm Tr}\left\{\gamma^\mu\left[\frac{1}{i\not{\partial}-m}(-e\not{A})\frac{1}{i\not{\partial}-m}\left(\frac{\Lambda^2}{\not{\partial}^2+\Lambda^2}\right)^2\delta(x-y)\right]\right. \\
&\quad +\gamma^\mu\frac{1}{i\not{\partial}-m}\left(\frac{\Lambda^2}{\not{\partial}^2+\Lambda^2}\right)^2(ie)\{(\partial_\nu A^\nu)+2A^\nu\partial_\nu+\frac{1}{4}\left[\gamma^\alpha,\gamma^\nu\right]F_{\alpha\nu}\} \\
&\qquad \times\left(\frac{1}{\not{\partial}^2+\Lambda^2}\right)\delta(x-y)
\end{aligned}$$

*1 Feynman 振幅の計算が初めての読者は，とりあえず (4.2.24) に進んで後で詳細を吟味していただきたい．

$$+\gamma^\mu \frac{1}{i\partial\!\!\!/ - m}\left(\frac{1}{\partial\!\!\!/^2+\Lambda^2}\right)(ie)\{(\partial_\nu A^\nu)+2A^\nu\partial_\nu+\frac{1}{4}\left[\gamma^\alpha,\gamma^\nu\right]F_{\alpha\nu}\}$$
$$\times\left(\frac{\Lambda^2}{\partial\!\!\!/^2+\Lambda^2}\right)^2\delta(x-y)\Bigg\} \tag{4.2.20}$$

が得られる．ただし，Dirac の $\gamma$ 行列の性質 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$ と共変微分 $D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu$ を用いた電磁場の定義式 $[D_\mu,D_\nu]=-ieF_{\mu\nu}$ を使って導かれる関係式

$$\begin{aligned}
D\!\!\!\!/^2 &= \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}D_\mu D_\nu+\frac{1}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]D_\mu D_\nu\\
&= D_\mu D^\mu-\frac{ie}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\\
&= \partial_\mu\partial^\mu-ie\left[\partial_\mu A^\mu+A^\mu\partial_\mu\right]-e^2A_\mu A^\mu-\frac{ie}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\\
&= \partial_\mu\partial^\mu-ie\left[(\partial_\mu A^\mu)+2A^\mu\partial_\mu\right]-e^2A_\mu A^\mu-\frac{ie}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

を用いた．もちろん，$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ である．ここで微分演算子 $\partial_\mu$ は，$(\partial_\mu A^\mu)$ と $F_{\mu\nu}$ に現れるときは通常のようにすぐ後にくる関数のみに作用するが，それ以外の場合には $\partial_\mu$ の右側にくるすべての $x$ 変数に作用するものとする．$eA_\nu(z)$ に関して関数微分することにより，正則化された真空の分極テンソル

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to x}\mathrm{Tr}\Bigg\{&\gamma^\mu\frac{(-1)}{i\partial\!\!\!/-m}\gamma^\nu\delta(x-z)\left(\frac{\Lambda^2}{\partial\!\!\!/^2+\Lambda^2}\right)^2\delta(x-y)\\
&+\gamma^\mu\frac{1}{i\partial\!\!\!/-m}\left(\frac{\Lambda^2}{\partial\!\!\!/^2+\Lambda^2}\right)^2(i)\Big[(\partial^\nu\delta(x-z))+2\delta(x-z)\partial^\nu\\
&+\frac{1}{2}\left[\gamma^\alpha,\gamma^\nu\right](\partial_\alpha\delta(x-z))\Big]\times\left(\frac{1}{\partial\!\!\!/^2+\Lambda^2}\right)\delta(x-y)\\
&+\gamma^\mu\frac{1}{i\partial\!\!\!/-m}\left(\frac{1}{\partial\!\!\!/^2+\Lambda^2}\right)(i)\Big[(\partial^\nu\delta(x-z))+2\delta(x-z)\partial^\nu\\
&+\frac{1}{2}\left[\gamma^\alpha,\gamma^\nu\right](\partial_\alpha\delta(x-z))\Big]\times\left(\frac{\Lambda^2}{\partial\!\!\!/^2+\Lambda^2}\right)^2\delta(x-y)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

が得られる．さらに，$\delta$-関数の Fourier 表示 (4.2.14) を用いると

$$\Pi^{\mu\nu}(q) \;=\; \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\Bigg\{\gamma^\mu\frac{(-1)}{k\!\!\!/+q\!\!\!/-m}\gamma^\nu\frac{1}{k\!\!\!/-m}\left(\frac{\Lambda^2}{-k^2+\Lambda^2}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\gamma^{\mu}\frac{1}{\not k+\not q-m}\left(\frac{\Lambda^2}{-(k+q)^2+\Lambda^2}\right)^2\left[q^{\nu}+2k^{\nu}+\frac{1}{2}\left[\gamma^{\alpha},\gamma^{\nu}\right]q_{\alpha}\right]\\
&\qquad\times\left(\frac{1}{-k^2+\Lambda^2}\right)\\
&+\gamma^{\mu}\frac{1}{\not k+\not q-m}\left(\frac{1}{-(k+q)^2+\Lambda^2}\right)\left[q^{\nu}+2k^{\nu}+\frac{1}{2}\left[\gamma^{\alpha},\gamma^{\nu}\right]q_{\alpha}\right]\\
&\qquad\times\left(\frac{\Lambda^2}{-k^2+\Lambda^2}\right)^2\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.2.23}
$$

のように，最終的に真空の分極テンソルの運動量表示が得られる．

この式 (4.2.23) で最初の項は素朴な形状因子(form factor) $\left(\frac{\Lambda^2}{-k^2+\Lambda^2}\right)^2$ を用いた正則化に対応し，くり込み理論の定式化の初期の頃からよく知られているようにそれだけではゲージ不変性を破る．現在のゲージ不変な正則化では，残りの 2 つの項がこのゲージ対称性の破れを回復する働きをする．

Dirac 行列に関するよく知られたトレースの計算の後に，Feynman のパラメター表示*2 を用いると，分極テンソルは運動量 $k^{\mu}$ に関する積分の後に真空の分極テンソルの最低次の摂動計算の結果が，$\Lambda$ を大きくした極限で次のようにゲージ不変な形で求められる

$$
\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(q) &= \left(\frac{1}{4\pi^2}\right)(q^{\mu}q^{\nu}-g^{\mu\nu}q^2)\\
&\qquad\times\left\{\int_0^1 d\alpha 2\alpha(1-\alpha)\ln\left[\frac{\Lambda^2}{-\alpha(1-\alpha)q^2+m^2}\right]-\frac{1}{3}\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.2.24}
$$

この式が $q^{\mu}q^{\nu}-g^{\mu\nu}q^2$ に比例していることが，図 4.1 および (4.1.15) で示されるゲージ対称性を保つことを示しており，確かに光子の質量は 0 に留まることがわかる．もし $\Pi^{\mu\nu}(q)$ が $g^{\mu\nu}$ に比例する余分な項を含んでいると (4.1.15) が満たされなくなる．このときは，座標表示へ Fourier 変換すると高次の量子補正として光の質量項 (4.1.4) が作り出されることになる．

共変正則化は計算の途中で一切発散を出さない有限な計算に基づいて，ゲージ対称性を満たす結果を出すことがわかる．このことは同時に，現在の量子電

---

*2 例えば，$\frac{1}{ABC^2}=3!\int_0^1 d\alpha\int_0^{1-\alpha}d\beta\frac{1-\alpha-\beta}{[\alpha A+\beta B+(1-\alpha-\beta)C]^4}$

磁力学のゲージ対称性は量子的に破れることはないことを示している．とくに時空の次元を計算のすべての段階で 4 に保っていることは，後に議論する一般の量子異常の議論で基本的に重要になる．

この真空の分極テンソル (4.2.24) で $\ln \Lambda^2$ を含む項の係数は(第 7 章で説明する)くり込み群の $\beta$-関数に関係しており，正則化の関数 $f(x)$ の選び方によらないことが示される．例えば，

$$f(x^2/\Lambda^2) = \left(\frac{\Lambda^2}{x^2+\Lambda^2}\right)^n \quad , \quad n \geqq 2 \tag{4.2.25}$$

も同じ $\ln \Lambda^2$ の係数を与えることが確められる．このことは，$\ln \Lambda^2$ の係数は後に第 7 章で議論する Weyl 量子異常と関係しており，Weyl 量子異常が正則化の関数 $f(x)$ の選び方によらないことからも理解される．それに反して定数項の $-1/3$ は正則化の関数の選び方による．しかし，このことは別段問題にはならない．なぜならこの定数項はくり込み理論では光子の波動関数のくり込み条件(これは，くり込みのスキームが決まれば一意的に与えられる)に運動量の切断のパラメター $\ln \Lambda^2$ と同時に吸収されるからである．

現在の共変正則化は，2 点関数以外の振幅の計算にも簡単に拡張でき，また Weinberg-Salam 理論のようなカイラルな(すなわちパリティを破る) 理論の実際の計算にも応用できる．この共変正則化は Higgs 場が存在し Fermi 粒子の右手系と左手系が混ざり合うような場合にも簡単に拡張できるからである．

## 4.3　カイラル対称性の量子的破れ

最も簡単なゲージ理論である量子電磁力学に基づいて，かつて福田-宮本，朝永，Steinberger が遭遇した軸性カレントに付随したカイラル対称性の量子的破れ(量子異常)の計算を行う．

量子電磁力学の Euclid 化した経路積分 (4.2.5) は次の式で与えられる．

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J^\mu) = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu] \times \exp\left\{\int d^4x\{\mathcal{L}_{\text{eff}}\}\right\} \tag{4.3.1}$$

ただし，$\mathcal{L}_J = 0$ とした．また経路積分の測度の表式で

$$[\mathcal{D}A_\mu] = \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \tag{4.3.2}$$

を定義した．すなわち，測度 $[\mathcal{D}A_\mu]$ はゲージ固定に関係した部分をすべて含む．

この経路積分で**カイラル変換**と呼ばれる次の Fermi 粒子の場の変数変換を考える．

$$\begin{aligned}\psi(x)' &= e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x),\\ \bar{\psi}(x)' &= \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5}\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

ここで $\psi'(x)^\dagger = \psi(x)^\dagger e^{-i\alpha(x)\gamma_5}$ であるが，Dirac の $\gamma_5$ と $\gamma^0$ が反交換するために，上記のように $\bar{\psi} = \psi(x)^\dagger\gamma^0$ が変換される．ただし

$$\gamma_5 = \gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5^2 = 1, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{4.3.4}$$

である．この変数変換の下での恒等式

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\exp\left\{\int d^4x\{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\bar{\psi},\psi,A_\mu)\}\right\}\\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'[\mathcal{D}A_\mu]\exp\left\{\int d^4x\{\mathcal{L}_{\text{eff}}(\bar{\psi}',\psi',A_\mu)\}\right\}\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

を考える．すなわち，定積分では積分の結果は積分変数の名前のつけ方にはよらないという結果，$\int f(x)dx = \int f(y)dy$，の一般化である．この恒等式で Fermi 粒子の関与した部分を考察すると，まず指数の肩に乗った作用の中で $\alpha(x)$ を微少量として $\gamma_5$ と $\gamma^\mu$ が反交換することに注意すると

$$\begin{aligned}&\int d^4x\{\bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x) - m\bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5}e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x)\}\\ &\quad = \int d^4x\{\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x)\}\\ &\qquad + \int d^4x\{-\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) - 2mi\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\}\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

が得られる．またこの変数変換に対して経路積分の測度は変わらないと**仮定すると**

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'[\mathcal{D}A_\mu] = \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu] \tag{4.3.7}$$

が成立する．

これらの結果を組み合わせると，経路積分の指数の肩に乗った $\alpha(x)$ を含む項を展開して $\alpha(x)$ に関して 1 次の項のみを残すと，上記の恒等式は

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\left\{\int d^4x[-\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)-2mi\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)]\right\}$$
$$\times\exp\left\{\int d^4x\{\mathcal{L}_{\text{eff}}\}\right\}$$
$$\equiv\int d^4x\langle\{-\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)-2mi\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\}\rangle=0 \tag{4.3.8}$$

と書かれる．あるいは，部分積分して $\alpha(x)$ が点 $x$ の近傍に $\delta$-関数的に山を持っている場合を考えると

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle=2mi\langle\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\rangle \tag{4.3.9}$$

という“素朴な”カイラル恒等式が得られる．$\gamma_5$ を含むカレント $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$ は，軸性カレントと呼ばれている．もし Fermi 粒子の質量が $m=0$ の場合は軸性カレントは保存し，理論はカイラル不変となる．

福田-宮本らが 1949 年に見つけ Bell-Jackiw および Adler が 1969 年に精密に分析して示したのは，この素朴なカイラル恒等式 (4.3.9) は Lorentz 共変な摂動理論では成立しないという事実であった．実際の摂動計算は非常に複雑であり，また線形(すなわち 1 次の)発散する Feynman 図を扱うために微妙な積分の計算を扱うことになる．しかし，われわれが導入した共変正則化を用いると計算は非常に簡単であり，また摂動計算をしなくともこの素朴なカイラル恒等式は成立しないことが示される．

摂動計算に基づくこのカイラル恒等式のチェックは，光子に関係した真空の分極ベクトルの計算の場合 (4.2.8) と同様に

$$\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle=\lim_{y\to x}\operatorname{Tr}\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\not{D}-m}\delta(x-y) \tag{4.3.10}$$

の分母で $\not{D}=\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)$ を $eA_\mu$ のべきに展開し計算される．ただし，現在の場合は荷電共役の考察から $eA_\mu$ の 1 次の項は 0 になり 2 次の項が最低次の寄与を与える．したがって，Feynman 図の分析では図 4.3 の 3 角形のグラフ(ただし (4.3.9) の左辺のカレントを $j_5^\mu$ と記す)を計算することになり，カイラル量子異常は **3 角量子異常**(triangle anomaly)とも呼ばれる．このグラフの発散の次数は $d=1$ であり，1 次の線形発散をする．

この計算に共変正則化を適用すると $f(x)$ を正則化の関数として

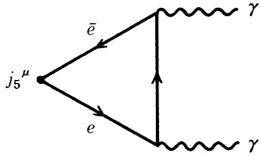



図 **4.3**　3 角量子異常を出す Feynman 図

$$\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_{\rm cov} \equiv \lim_{y\to x} {\rm Tr}\,\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\not{D}-m}f(\not{D}^2/\Lambda^2)\delta(x-y) \qquad (4.3.11)$$

を考察することになる．直接にこれを計算することも不可能ではないが，現在必要な量はこれを微分した量が (4.3.9) を満たすか否かであるので

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_{\rm cov} \qquad (4.3.12)$$

が計算できれば十分である．

この計算は次のように簡単にできる．まず Euclid 化した理論 (4.2.4) におけるエルミートな演算子 $\not{D}$ の固有関数の完全系

$$\begin{gathered}\not{D}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), \qquad \int d^4x\varphi_m^\dagger(x)\varphi_n(x) = \delta_{mn} \\ \sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(y) = \delta(x-y)\end{gathered} \qquad (4.3.13)$$

を用いて (4.3.11) を

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_{\rm cov} &= \lim_{y\to x}{\rm Tr}\,\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\not{D}-m}f(\not{D}^2/\Lambda^2)\sum_n\varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(y) \\ &= \lim_{y\to x}\sum_n\varphi_n^\dagger(y)\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\lambda_n-m}f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x) \\ &= \sum_n\varphi_n^\dagger(x)\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\lambda_n-m}f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x)\end{aligned} \qquad (4.3.14)$$

と書くことができ，この和は関数 $f(x)$ が大きな $x$ で急速に 0 に近づけば収束する．この式の微分を考えると

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_{\rm cov} = \partial_\mu\sum_n\varphi_n^\dagger(x)\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\lambda_n-m}f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n \Big[\partial_\mu \varphi_n^\dagger(x)\gamma^\mu\gamma_5 \frac{1}{i\lambda_n - m} f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x) \\
&\quad + \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma^\mu\gamma_5 \frac{1}{i\lambda_n - m} f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\partial_\mu\varphi_n(x)\Big] \\
&= -\sum_n (\not{D}\varphi)_n^\dagger(x)\gamma_5 \frac{1}{i\lambda_n - m} f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x) \\
&\quad -\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 \frac{1}{i\lambda_n - m} f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\not{D}\varphi_n(x) \\
&= -\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 \frac{2\lambda_n}{i\lambda_n - m} f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x)
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

ここで $\gamma^\mu$ は反エルミート的であることと $\gamma^\mu$ は $\gamma_5$ と反交換すること，および $\not{D}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ を用いた．この式はさらに

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu\langle\bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_{\rm cov} \\
&= 2im\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\frac{1}{i\lambda_n - m}f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x) + 2i\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x) \\
&= 2im\langle\bar\psi(x)\gamma_5\psi(x)\rangle_{\rm cov} + 2i\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x)
\end{aligned}
\tag{4.3.16}
$$

と書かれる．

すなわち，共変正則化を用いてゲージ不変に正則化した結果，素朴なカイラル恒等式 (4.3.9) とは異なる余分な対称性を破る最後の項が生じたことになる．もしこの余分な項が 0 でなければ，カイラル恒等式は素朴な形からずれて量子効果により変更されることになる．この最後の項は次のように計算される．まず演算子 $f(\not{D}^2/\Lambda^2)$ が十分収束性のよいものと考えて，和を 4 成分の関数 $\varphi_n(x)$ から平面波の完全系に書き換える．

$$
\begin{aligned}
\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\lambda_n^2/\Lambda^2)\varphi_n(x) &= \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/\Lambda^2)\varphi_n(x) \\
&= {\rm tr}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\gamma_5 f(\not{D}^2/\Lambda^2)e^{ikx}
\end{aligned}
\tag{4.3.17}
$$

ただし，トレースは 4 つの値を取る Dirac の足の自由度にわたるものとする．この計算は次のように遂行される．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\gamma_5 f(\not{D}^2/\Lambda^2)e^{ikx} \\
&= \mathrm{tr}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_5 f\left(\frac{(ik_\mu + D_\mu)(ik^\mu + D^\mu) - \frac{ie}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}}{\Lambda^2}\right) \\
&= \Lambda^4\,\mathrm{tr}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_5 f\left(-k_\mu k^\mu + \frac{2ik^\mu D_\mu}{\Lambda} + \frac{D^\mu D_\mu}{\Lambda^2}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{ie}{4\Lambda^2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\right) \qquad (4.3.18)
\end{aligned}
$$

ここで次の関係（$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ に注意）

$$
\begin{aligned}
\not{D}^2 &= \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}D_\mu D_\nu + \frac{1}{2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]D_\mu D_\nu \\
&= D_\mu D^\mu - \frac{ie}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu} \qquad (4.3.19)
\end{aligned}
$$

を用いたのちに $e^{ikx}$ に $f(\not{D}^2/\Lambda^2)$ を通過させ，その後に積分変数のスケール変換 $k_\mu \to \Lambda k_\mu$ を行った．つぎに，関数 $f(x)$ の中身を $x = -k_\mu k^\mu = |k^2|$ のまわりで展開して

$$
\begin{aligned}
&f\left(-k_\mu k^\mu + \frac{2ik^\mu D_\mu}{\Lambda} + \frac{D^\mu D_\mu}{\Lambda^2} - \frac{ie}{4\Lambda^2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\right) \\
&= f(-k_\mu k^\mu) + f'(-k_\mu k^\mu)\left\{\frac{2ik^\mu D_\mu}{\Lambda} + \frac{D^\mu D_\mu}{\Lambda^2} - \frac{ie}{4\Lambda^2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2!}f''(-k_\mu k^\mu)\left\{\frac{2ik^\mu D_\mu}{\Lambda} + \frac{D^\mu D_\mu}{\Lambda^2} - \frac{ie}{4\Lambda^2}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\right\}^2 + \cdots \\
&\qquad (4.3.20)
\end{aligned}
$$

$\Lambda \to \infty$ の極限では $1/\Lambda^4$ の大きさの項のみが生き残ることに注意する．しかも $\gamma_5$ を含むトレース $\mathrm{tr}\,(\gamma_5 \ldots)$ が消えないためには $\gamma$-行列を 4 個以上含む必要があることに注意する．この条件を満たすのは $(\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu})^2$ を含む (4.3.20) の第 3 項のみである．

このようにして

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_5 \frac{1}{2!}f''(-k_\mu k^\mu)\{\frac{-ie}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\}^2 \\
&= \mathrm{tr}\,\gamma_5 \frac{1}{2}\{\frac{-ie}{4}\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]F_{\mu\nu}\}^2 \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty dx x f''(x)
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{e^2}{32\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \qquad (4.3.21)$$

が $\gamma$-行列に関してトレース

$$\mathrm{tr}\,(1/16)\gamma_5\left[\gamma^\mu,\gamma^\nu\right]\left[\gamma^\alpha,\gamma^\beta\right] = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \qquad (4.3.22)$$

をとったのちに得られる．ただし完全反対称シンボル $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ は $\epsilon^{1234}=1$ で規格化した．また $d^4k = \pi^2|k^2|d|k^2| = \pi^2 x dx$ と

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx\; xf''(x) &= xf'(x)|_0^\infty - \int_0^\infty dx f'(x)\\ &= -f(x)|_0^\infty = f(0) = 1 \end{aligned} \qquad (4.3.23)$$

を用いた．ただし $xf'(x)|_0^\infty = 0$ となることを使った．

このようにして摂動計算を用いることなく(最後の)量子異常項を含むカイラル恒等式

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle\bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_{\mathrm{cov}} &= 2im\langle\bar\psi(x)\gamma_5\psi(x)\rangle_{\mathrm{cov}}\\ &\quad +2i\left(\frac{e^2}{32\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\end{aligned} \qquad (4.3.24)$$

が導かれた．この結果は正則化の関数 $f(x)$ の詳細に依存しない．$\gamma_5$ 対称性に付随した WT 恒等式 (4.3.9) を破る異常項は有限であり，発散と対称性の量子的破れ(量子異常)は原理的に独立な概念であることがわかる．あるいは，Fermi 粒子に対する源 $\eta(x)$, $\bar\eta(x)$ を含めたより詳しい記法では，恒等式は源の項の変化分を考慮して

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\langle(\bar\psi(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x))_{\mathrm{cov}}\rangle_J\\ &= \langle 2im(\bar\psi(x)\gamma_5\psi(x))_{\mathrm{cov}}\\ &\quad +2i\left(\frac{e^2}{32\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x) - i\bar\psi(x)\gamma_5\eta(x) - i\bar\eta(x)\gamma_5\psi(x)\rangle_J\end{aligned} \qquad (4.3.25)$$

で与えられる．一般の Green 関数に対する恒等式はこの式を源に関して適当な回数微分してその後にすべての源を 0 にして得られる[*3]．

*3　Minkowski 計量の結果は，$\epsilon^{1230}=1$ として異常項の前の虚数 $i$ を取り除いて得られる．

## 4.4 Adler–Bardeen の定理

われわれの導出から，この異常項を含む量子的に変更された恒等式 (4.3.24) はゲージ不変に正則化された理論 (4.1.1) で正確に成立する裸の恒等式(bare identity)であることがわかるが，事実さらに高次の量子効果を含めても変更されない正確な恒等式であることが知られている．これは Adler-Bardeen の定理と呼ばれる．

Adler–Bardeen の定理は基本的なものであるが，本書では技術的な理由でくり込みの詳細は議論しないので，ここでこの定理の概要を説明したい*4．まず演算子 $2im\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ は現在の理論では唯一の質量次元が 3 のゲージ不変な擬スカラー量であるので，それ自身に比例する発散を引き起こしうるが，波動関数と質量のくり込みの後に有限になり

$$2im\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) = 2im_r N[\psi(x)\gamma_5\psi(x)] \qquad (4.4.1)$$

を与える．ただし，$N[\psi(x)\gamma_5\psi(x)]$ は正規積(normal product)と呼ばれ，任意の Green 関数に挿入したときに有限な値を与える演算子を表す．同様に $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$ も次元が 3 の唯一のゲージ不変な(正確には BRST 不変な)軸性ベクトル量なので，それ自身に比例する発散を引きおこす(ただし，図 4.3 の 3 角形の図を含まない Feynman 図からの発散は $\psi$ の波動関数のくり込み定数で相殺される)．したがって発散する定数 $Z$ を用いて

$$\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) = (1+Z)N[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)] \qquad (4.4.2)$$

と書ける．最後に異常項 $2i\left(\dfrac{e^2}{32\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)$ は次元 4 のゲージ不変な擬スカラー量であるが全微分で書かれる ($\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x) = 2\partial_\mu[\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta}]$) ので，それ自身に比例する発散と同時に軸性カレントの微分 $\partial_\mu N[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)]$ に比例する発散を誘起するが，擬スカラー $N[\psi(x)\gamma_5\psi(x)]$ に比例する発散は引き起こさない．実は自分自身に比例する発散は起こらず，量子電磁気学でのよく知られた $eA_\mu = e_r A_{r\mu}$ という関係式を用いると(発散する定数 $Z'$ を導入して)

*4 くり込みの詳細に慣れていない読者はこの部分は飛ばしていただきたい．本書の狙いは非摂動的な量子異常の定式化を与えることにあるからである．

$$2i\left(\frac{e^2}{32\pi^2}\right)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)$$
$$= 2i\left(\frac{e_r^2}{32\pi^2}\right)N[\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)] + Z'\partial_\mu N[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)] \qquad (4.4.3)$$

を与える.（もし自分自身に比例する発散が生じると (4.3.24) が裸の正確な恒等式であるということに矛盾する.）

これらの関係式を (4.3.24) の恒等式に代入すると

$$(1+Z)\partial_\mu N[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)]$$
$$= 2im_r N[\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)]$$
$$+2i\left(\frac{e_r^2}{32\pi^2}\right)N[\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)] + Z'\partial_\mu N[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)] \qquad (4.4.4)$$

を与え，発散する係数は $Z = Z'$ となり両辺で相殺し，くり込まれた異常項を含む正確な（演算子の間の）恒等式が成立することになる.

# 5 経路積分のヤコビアンと対称性の量子的破れ

この章では，対称性の量子的破れの一般的な定式化を経路積分に基づいて行う．経路積分では量子異常は対称性を定義する場の理論の積分変数の変換に伴うヤコビアンとして定義される．すなわち正しい WT 恒等式が最初から定式化されるわけである．このような定式化が実現されるためには，発散をコントロールする適切な正則化が必須になるが，経路積分の定式化ではゲージ不変なモード切断の処方が有効であることが示される．量子異常と関連した話題として，インスタントン解の概要と Atiyah-Singer の指数定理を説明する．その応用として一般に相互作用表示への素朴なユニタリー変換は存在しないこと，および対称性が量子異常とインスタントン効果で破れているときには自発的な対称性の破れに伴う Nambu-Goldstone 粒子は一般に現れないことを議論する．

## 5.1 量子電磁力学におけるカイラルヤコビアン

量子電磁力学の Euclid 化された経路積分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\exp\left[\int \bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x + S_{\text{Max}}\right] \tag{5.1.1}$$

を考える．ここで，$\gamma^\mu$ 行列は反エルミート的

$$(\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu \tag{5.1.2}$$

であり，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} = -2\delta^{\mu\nu} \tag{5.1.3}$$

が成立し，

$$\gamma_5 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \gamma_5^\dagger \tag{5.1.4}$$

はエルミート的である．また

$$\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \tag{5.1.5}$$

が成立することが確かめられる．共変微分は $A_\mu$ を電磁場として

$$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) \tag{5.1.6}$$

で与えられ，$S_{\rm Max}$ は Maxwell の作用 $S_{\rm Max} = -(1/4)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2$ である．ゲージ場の経路積分の測度 $[\mathcal{D}A_\mu]$ は，適当なゲージ固定項を含むものとする．

カイラル変換に関するヤコビアンを分析するために Dirac 場の変数を

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n\varphi_n(x) = \sum_n \langle x|n\rangle a_n, \\ \bar\psi(x) &= \sum_n \bar b_n\varphi_n^\dagger(x) = \sum_n \bar b_n\langle n|x\rangle \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

のように，Euclid 化した理論でのエルミートな演算子 $\not{D}$ の固有関数

$$\begin{aligned} \not{D}\varphi_n(x) &= \lambda_n\varphi_n(x), \\ \int d^4x\varphi_n^\dagger(x)\varphi_l(x) &= \delta_{n,l} \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

で展開する．ただし，Dirac の変換理論の記法にならって $\langle x|n\rangle = \varphi_n(x)$ と書いた．この関数系は Dirac の作用を形式的に対角化する

$$\int [\bar\psi(i\not{D} - m)\psi]d^4x = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N (i\lambda_n - m)\bar b_n a_n \tag{5.1.9}$$

Fermi 粒子の経路積分の測度はこのとき，$\psi$，$\bar\psi$，$\bar a_n$ および $a_n$ がすべて Grassmann 数でありお互いに反交換すること，および Grassmann 数に関する積分は左微分で定義されることを考慮すると

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi &= [\det\langle n|x\rangle \det\langle x|n\rangle]^{-1}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^N d\bar b_n da_n \\ &= [\det\int d^4x\langle n|x\rangle\langle x|m\rangle]^{-1}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^N d\bar b_n da_n \\ &= [\det\delta_{nm}]^{-1}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^N d\bar b_n da_n \\ &= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^N d\bar b_n da_n \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

のように書かれる．このようにして，現在の定式化における経路積分のより扱いやすい定義が与えられる．

座標に依存する無限小のカイラル変換

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x) = \psi(x) + i\alpha(x)\gamma_5\psi(x),\\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5} = \bar{\psi}(x) + \bar{\psi}(x)i\alpha(x)\gamma_5\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

に対するヤコビアンの計算を考える．上記の経路積分の測度で議論するため，場の変数を固有関数の完全系で展開する．

$$\begin{aligned}\psi'(x) &\equiv \sum_n a'_n\varphi_n(x)\\ &= \sum_n a_n\varphi_n(x) + i\alpha(x)\gamma_5\sum_n a_n\varphi_n(x)\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

この式に左から $\varphi_n(x)^\dagger$ を掛けて座標に関して積分すると

$$a'_n = a_n + \sum_m i\int d^4x\varphi_n(x)^\dagger\alpha(x)\gamma_5\varphi_m(x)a_m \tag{5.1.13}$$

同様に

$$\begin{aligned}\bar{\psi}' &\equiv \sum_n \bar{b}'_n\varphi_n^\dagger(x)\\ &= \sum_n \bar{b}_n\varphi_n^\dagger(x) + \sum_n \bar{b}_n\varphi_n^\dagger(x)i\alpha(x)\gamma_5\end{aligned} \tag{5.1.14}$$

に右から $\varphi_n(x)$ を掛けて座標に関して積分すると

$$\bar{b}'_n = \bar{b}_n + \sum_m i\bar{b}_m\int d^4x\varphi_m^\dagger(x)\alpha(x)\gamma_5\varphi_n(x) \tag{5.1.15}$$

が得られる．これらの展開式から経路積分の測度の変換則は

$$\begin{aligned}\prod_{n=1} d\bar{b}'_n da'_n &= \det\left[\delta_{nm} + i\int d^4x\varphi_n(x)^\dagger\alpha(x)\gamma_5\varphi_m(x)\right]^{-1}\prod_{n=1} d\bar{b}_n\\ &\quad\times \det\left[\delta_{nm} + i\int d^4x\varphi_n(x)^\dagger\alpha(x)\gamma_5\varphi_m(x)\right]^{-1}\prod_{n=1} da_n\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

で与えられる．ただし，積分変数 $a_n$ および $\bar{b}_n$ が共に Grassmann 数であり，したがって積分は(左)微分で定義されヤコビアンは通常の数の場合と比して逆数で出ることを用いた．次に $\alpha(x)$ を微小量として

$$\det\left[\delta_{nm} + i\int d^4x\varphi_n(x)^\dagger\alpha(x)\gamma_5\varphi_m(x)\right]^{-2}$$

$$= \exp\left[-2i\sum_n \int d^4x\varphi_n(x)^\dagger \alpha(x)\gamma_5\varphi_n(x)\right] \tag{5.1.17}$$

を用いる．これは，一般の行列 $M$ に対する行列式に対して成立する恒等式 $\det M = \exp \mathrm{tr} \ln M$ と無限小の $\alpha(x)$ に対して成立する式

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\ln\left[\delta_{nm} + i\int d^4x\varphi_n(x)^\dagger\alpha(x)\gamma_5\varphi_m(x)\right]^{-2}\\ = -2i\sum_n\int d^4x\varphi_n(x)^\dagger\alpha(x)\gamma_5\varphi_n(x)\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

を用いて得られる．

このようにして，変数 $\psi$ と $\bar{\psi}$ で書いた経路積分の測度で表すと，無限小のカイラル変換に対する次のヤコビアン

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = J\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi,\\ &J \equiv \exp\left[-2i\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\right]\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

が得られる．

ヤコビアンを具体的に計算するために，次式

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\\ &= \lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f((\lambda_n)^2/M^2)\varphi_n(x)\\ &= \lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\varphi_n(x)\\ &\equiv \lim_{M\to\infty}\mathrm{Tr}\,\alpha(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\end{aligned} \tag{5.1.20}$$

を考える．ここで，$f(x)$ は任意の $x=\infty$ で速やかに 0 に近ずく $f(0)=1$ を満たす関数である．すなわちモードに関する切断 $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}$ を固有値に関する切断 $\lim_{M\to\infty} f((\lambda_n)^2/M^2)$ で置き換えたわけである．この固有値に関する切断はゲージ不変性を壊さない良い正則化になっている．

演算子 $\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)$ は，十分よく正則化されているので，ヤコビアンのゲー

ジ場依存性を陽に取り出すために Fermi 粒子に対する固有関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ を平面波 $\{e^{ikx}\}$ へユニタリー変換することを考える．この平面波への変換は場の理論における相互作用表示へのユニタリー変換に対応している．このときヤコビアンは(tr は Tr から時空間に関する積分を除いたものとして)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\,\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\\
&\quad\equiv \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\varphi_n(x)\\
&\quad= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)e^{ikx}\\
&\quad= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_5 f\{(ik_\mu + D_\mu)^2/M^2 - \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}/M^2\}\\
&\quad= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\, M^4\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_5 f\{(ik_\mu + D_\mu/M)^2 - \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}/M^2\}
\end{aligned}
\tag{5.1.21}
$$

で与えられる．ここで，残っているトレース(跡)は，Dirac の添え字に関するトレースを意味する．また

$$
\begin{aligned}
\not{D}^2 &= \gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu\\
&= \frac{1}{2}\{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\}D_\mu D_\nu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]D_\mu D_\nu\\
&= D_\mu D^\mu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu, D_\nu]\\
&= D_\mu D^\mu - \frac{ie}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{5.1.22}
$$

の関係式を用い，積分変数のスケール変換 $k_\mu \to Mk_\mu$ を行った．

ここで Dirac の $\gamma$ 行列のトレースに関する性質

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\,\gamma_5 = \mathrm{tr}\,\gamma_5[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = 0,\\
&\mathrm{tr}\,\gamma_5[\gamma^\mu,\gamma^\nu][\gamma^\alpha,\gamma^\beta] = 16\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{5.1.23}
$$

に注意する．例えば $\mathrm{tr}\,\gamma_5 = \mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0$ であることは，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,\gamma_5 &= -\mathrm{tr}\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = -\mathrm{tr}\,\gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \mathrm{tr}\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = 0,\\
\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^3\gamma^4 &= -\mathrm{tr}\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\gamma^3\gamma^4 = \mathrm{tr}\,\gamma^1\gamma^2 = \mathrm{tr}\,\gamma^2\gamma^1 = -\mathrm{tr}\,\gamma^1\gamma^2 = 0
\end{aligned}
\tag{5.1.24}
$$

などに注意すれば示される．ここで，異なる $\gamma^\mu$ 行列が反交換すること，$(\gamma^\mu)^2 = -1$ およびトレースの性質 $\mathrm{tr}\,\gamma^1\gamma^2 = \mathrm{tr}\,\gamma^2\gamma^1$ を用いた．

これらの性質を用いると，(5.1.21) は $1/M$ に関するべき展開の後に，$1/M^5$ 以上の項は 0 になるので（$\epsilon^{1234} = 1$ に注意して）

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\,\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2) &= \mathrm{tr}\,\gamma_5 \frac{1}{2!}\left\{\frac{-ie}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right\}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f''(-k_\mu k^\mu) \\ &= \frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \qquad (5.1.25)\end{aligned}$$

が得られる．ただし，

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f''(-k_\mu k^\mu) &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty f''(x)x dx \\ &= \frac{1}{16\pi^2} f'(x)x|_0^\infty - \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty f'(x)dx \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \qquad (5.1.26)\end{aligned}$$

を用いた．現在のメトリックの規約では $x = -k_\mu k^\mu > 0$ である．ヤコビアンの最終的な計算の結果は，途中の計算の不定性を除く目的で導入された正則化の関数 $f(x)$ が

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad f'(x)x|_{x=0} = f'(x)x|_{x=\infty} = 0 \qquad (5.1.27)$$

を満たす限り $f(x)$ の具体的な関数形には依存しない．$f(x)$ による正則化は計算のすべての過程でゲージ不変性を満たしている．この積分で，$k_\mu \to Mk_\mu$ のスケール変換をする前の運動量変数に対しては，任意の有限な区間 $-L \leqq k_\mu \leqq L$ からの積分への寄与は 0 になることがわかる．この意味で，大きな運動量すなわち時空間での短距離での性質がヤコビアンを決めることがわかる．この理由で，相互作用表示では発散とヤコビアン（量子異常）が密接に関係してくるわけである．

このようにして計算されたヤコビアンは第 4 章 3 節でのカイラル量子異常の計算と一致している．ヤコビアンが正則化 $f(x)$ によらないという事実は，カイラル量子異常は 3 角形の Feynman 図にゲージ不変性を要請すれば，発散とは無関係に一意的に決まるという摂動計算に基づく Adler の分析ともよく一致する．正則化の関数 $f(x)$ は，第 4 章での Noether カレントの正則化に現れた関

数と一致していることもわかる．

## 5.2 量子電磁力学における Ward-高橋の恒等式

このように，変数変換のヤコビアンの計算方法が確立されたので，これを用いて量子電磁力学における恒等式の定式化を改めて復習する．まず経路積分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\exp\left[\int \bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x + S_{\mathrm{Max}}\right] \tag{5.2.1}$$

において，変数変換（無限小の局所的なカイラル変換）

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x), \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

を考えると，次の恒等式が成立する

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'[\mathcal{D}A_\mu]\exp\left[\int \bar{\psi}'(i\not{D}-m)\psi' d^4x + S_{\mathrm{Max}}\right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\exp\left[\int \bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x + S_{\mathrm{Max}}\right] \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

すなわち，定積分の結果は積分変数の名前の付け方にはよらない，$\int f(x)dx = \int f(y)dy$，の一般化が成立する．ここでヤコビアンは

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = \exp\left[-2i\int dx\alpha(x)\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right]\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \tag{5.2.4}$$

作用の変化は

$$\begin{aligned} &\int \bar{\psi}'(i\not{D}-m)\psi' d^4x \\ &= \int d^4x\alpha(x)[\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) - 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi] + \int \bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

したがって上の恒等式で，$\alpha(x)$ の一次の項を集めると WT の恒等式

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\left\{\int d^4x\alpha(x)[\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) - 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi\right.$$

$$-2i\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}]\Big\}\exp\left[\int\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x+S_{\rm Max}\right]$$
$$\equiv\langle\int d^4x\alpha(x)[\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)-2im\bar{\psi}\gamma_5\psi-2i\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}]\rangle=0 \tag{5.2.6}$$

が得られる．この恒等式で $\alpha(x)$ を点 $x$ の近傍で $\delta$ 関数的な山を持つものに選ぶと，最終的なカイラル WT 恒等式

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\rangle=\langle 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi\rangle+\langle 2i\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\rangle \tag{5.2.7}$$

が得られ，この式は前章の結果 (4.3.24) と一致している．すなわち，変数変換のヤコビアンが対称性の量子的破れを表していることが示された．このカイラル恒等式の定式化は摂動計算に一切依存しない，その意味で非摂動的な定式化を与えていることに注意したい．

このように量子異常の原因およびその信頼できる定式化が明確になったので，朝永がかつて問題にした量子電磁力学におけるゲージ不変性の問題を扱ってみる．このときには，経路積分において次の変数変換を考えることになる．

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=e^{i\alpha(x)}\psi(x)=\psi(x)+i\alpha(x)\psi(x),\\ \bar{\psi}'(x)&=\bar{\psi}(x)e^{-i\alpha(x)}=\bar{\psi}(x)-\bar{\psi}(x)i\alpha(x)\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

したがって，ヤコビアンはカイラル変換の場合と同様の考察から

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'=J\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi,\\ &J=\exp\left[-i\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x(\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\varphi_n(x)-\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\varphi_n(x))\right]=1\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

となり，量子的破れを出さない．他方，作用は

$$\int\bar{\psi}'(i\not{D}-m)\psi'd^4x=\int d^4x\alpha(x)\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)+\int\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x \tag{5.2.10}$$

のように変化するので，ゲージ変換に対する WT 恒等式は，カイラル恒等式と同様の手続きを経て

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\left\{\int d^4x\alpha(x)\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\right\}\exp\left[\int\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x+S_{\mathrm{Max}}\right]$$
$$\equiv\langle\int d^4x\alpha(x)\partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))\rangle=0 \tag{5.2.11}$$

が得られる．したがって，ゲージ対称性に対する恒等式は

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\rangle=0 \tag{5.2.12}$$

を与え，ゲージ対称性は量子的に破れることはなく，光子の質量が 0 であることが非摂動的な精度で成立することが示された．

## 5.3 QCD 型の理論におけるカイラル対称性の量子的破れ

量子電磁力学(これは Abel 的なゲージ場理論と呼ばれる)の素直な非 Abel 的な群への一般化である QCD(Quantum Chromodynamics，量子色力学)と同じ形をした理論の構成の説明から始めたい．この理論の Euclid 化された経路積分は

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi[\mathcal{D}A_\mu]\exp\left[\int\bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi d^4x+S_{\mathrm{YM}}\right] \tag{5.3.1}$$

で定義される．ここでの Dirac 行列の規約は QED の場合と同様に，$\gamma^\mu$ 行列は反エルミート的であり，

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}=-2\delta^{\mu\nu} \tag{5.3.2}$$

が成立し，

$$\gamma_5=-\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4=\gamma_5^\dagger,\quad(\gamma_5)^2=1 \tag{5.3.3}$$

を満たす $\gamma_5$ はエルミート的である．共変微分 $D_\mu$ は

$$\not{D}\equiv\gamma^\mu D_\mu=\gamma^\mu(\partial_\mu-\sum_a igA_\mu^aT^a)\equiv\gamma^\mu(\partial_\mu-igA_\mu) \tag{5.3.4}$$

のようには非 Abel 的な群の生成演算子 $T^a$ を用いて定義される．非 Abel 的なゲージ場は生成演算子の数と同じ数の成分を持つ．ただし，今後は同じ添え字が 2 回現れるときには，断らない限りその添え字について和をとるものとする．あるいは最後の表式のように $A_\mu=A_\mu^aT^a$ と書かれる場合も多い．ゲージ場の場の強さのテンソル $F_{\mu\nu}^a$(電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ の一般化)は

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)T^a \equiv -igF_{\mu\nu} \tag{5.3.5}$$

で定義される．$S_{\rm YM}$ は非 Abel 的なゲージ場(Yang-Mills 場と呼ばれる)の作用

$$\begin{aligned} S_{\rm YM} &= -\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu,a}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)^2 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

であり，Maxwell の電磁場理論の作用の一般化である．ゲージ場の経路積分の測度 $[\mathcal{D}A_\mu]$ は，適当なゲージ固定項を含むものとする．

この非 Abel 的な群について少し説明を加えると，一般のコンパクトで連結な群は単純群と Abel 的な群の直積に分解される．単純な非 Abel 的な群の生成演算子 $T^a$ はエルミート的な行列で与えられ，

$$[T^a, T^b] = T^aT^b - T^bT^a = if^{abc}T^c \tag{5.3.7}$$

の関係を満たす．添え字 $a, b, c$ に関して完全反対称な $f^{abc}$ は構造定数(structure constant)と呼ばれる．生成演算子の規格化は

$$\mathrm{tr}\, T^aT^b = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{5.3.8}$$

で与えられるものとする．具体的には，角運動量でもおなじみの群 $SU(2)$ の場合には，生成演算子(の基本表現)は次の 3 個の Pauli 行列を用いた式で与えられ，

$$T^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.3.9}$$

代数関係

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c \tag{5.3.10}$$

を満たす．ただし，$\epsilon^{abc}$ は 3 個の添え字に関して完全反対称な $\epsilon^{123} = 1$ を満たすシンボルである．群 $SU(3)$ の場合には，Gell-Mann 行列と呼ばれる Pauli 行列を 3 行 3 列に一般化した 8 個の $\{\lambda^a, a = 1 \sim 8\}$ を用いて

$$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a, \quad a = 1 \sim 8 \tag{5.3.11}$$

で与えられる．本書では，$n^2 - 1$ 個の生成演算子で定義される群 $SU(n)$ のみを

考えることにする．

さて，上記の経路積分に現われる Dirac 場は，群 $SU(2)$ の場合には詳しく書くと

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \tag{5.3.12}$$

のように，通常の 4 成分の Dirac 場 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ を 2 つ含んでいる．したがって，Dirac 行列も通常の 4 行 4 列の $\gamma$ 行列を対角線に沿って 2 個並べた 8 行 8 列の行列で表示するのが正しいが，上記のように略記しても誤解はないので，通常は上記のように書かれる．現実の強い相互作用を記述する QCD のようにゲージ群が $SU(3)$ の場合には 3 個の Dirac 場を一つの組にして考えることになる．

例えば，ゲージ群が $SU(2)$ の場合を考えると，群 $SU(2)$ に値を持つ任意の関数は $\omega^a(x)$ を実の関数として

$$g(x) = \exp\,[i\sum_{a=1}^{3}\omega^a(x)T^a] \in SU(2) \tag{5.3.13}$$

のように，上記の Pauli 行列で表わした群 $SU(2)$ の生成演算子 $T^a$ を用いて書くことができる．このとき，**非 Abel 的な（局所）ゲージ変換**と呼ばれるものは

$$\begin{aligned} &\psi(x) \to \psi(x)' = g(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}(x)g(x)^\dagger \\ &A_\mu(x) \equiv \sum_a A_\mu(x)^a T^a \to A'_\mu(x) = g(x)A_\mu(x)g^\dagger(x) + \frac{1}{ig}(\partial_\mu g(x))g^\dagger(x) \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

という置き換えで定義される．すなわち，ゲージ変換とは物質場 $\psi(x)$ に関しては時空間の各点において（すなわち局所的な）$g(x)$ で指定される内部自由度の空間内の回転に対応し，ゲージ場 $A_\mu$ に関しては回転（第 1 項）と併進（第 2 項）の組み合わせで表現される．このときは共変微分 $D_\mu$ は

$$\begin{aligned} D'_\mu &= \partial_\mu - igA'_\mu(x) = g(x)(\partial_\mu - igA_\mu(x))g^\dagger(x) \\ &= g(x)D_\mu g^\dagger(x) \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

のように変換することが確かめられ，したがって $D_\mu\psi(x)$ は

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi'(x) &= (\partial_\mu - igA'_\mu(x))\psi'(x) \\ &= g(x)(\partial_\mu - igA_\mu(x))\psi(x) = g(x)D_\mu\psi(x) \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

のように，場の変数 $\psi(x)$ と同じゲージ変換則を持ち，この理由で $D_\mu$ は共変微分(covariant derivative)と呼ばれる．また場の強さのテンソルは共変微分の変換則から

$$[D'_\mu, D'_\nu] = -igF'_{\mu\nu} = g(x)[D_\mu, D_\nu]g^\dagger(x) = -igg(x)F_{\mu\nu}g^\dagger(x) \quad (5.3.17)$$

のように変換される．したがって，$g(x)g^\dagger(x) = 1$ に注意すると上記の経路積分 (5.3.1) に現れる作用積分は

$$\begin{aligned} &\int[\bar\psi(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}]d^4x \\ &= \int[\bar\psi(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]d^4x \\ &= \int[\bar\psi'(i\not{D}' - m)\psi' - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}]d^4x \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

のように形を変えない，すなわち**ゲージ不変**であることがわかる．ただし $\mathrm{tr}\,T^aT^b = (1/2)\delta^{ab}$ を用いた．関数 $g(x)$ 自身もゲージ変換と呼ばれることが多い．

このようにして定義された非 Abel 的なゲージ理論で，座標に依存する局所的な無限小カイラル変換

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x) = \psi(x) + i\alpha(x)\gamma_5\psi(x), \\ \bar\psi'(x) &= \bar\psi(x)e^{i\alpha(x)\gamma_5} = \bar\psi(x) + \bar\psi(x)i\alpha(x)\gamma_5 \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

を考える．カイラル変換に関するヤコビアンを分析するために Fermi 粒子の変数を量子電磁力学の場合と同様に

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n\varphi_n(x) \\ \bar\psi(x) &= \sum_n \bar b_n\varphi_n^\dagger(x) \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

のように，エルミートな演算子 $\not{D}$ の固有関数

$$\begin{aligned} \not{D}\varphi_n(x) &= \lambda_n\varphi_n(x) \\ \int d^4x\varphi_n^\dagger(x)\varphi_l(x) &= \delta_{n,l} \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

で展開する．この関数系は Fermi 粒子の作用を対角化する．

$$\int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi d^4x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (i\lambda_n - m)\bar{b}_n a_n \tag{5.3.22}$$

Fermi 粒子の経路積分の測度はこのとき

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} d\bar{b}_n da_n \tag{5.3.23}$$

のように書かれ，無限小のカイラル変換に対して次のヤコビアン

$$J = \exp\left[-2i \lim_{N\to\infty} 1 \sum_{n=1}^{N} \int d^4x \alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\right] \tag{5.3.24}$$

が得られることも電磁力学の場合と同様である．

このヤコビアンの具体的な計算は

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int d^4x \alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f((\lambda_n)^2/M^2)\varphi_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x \alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\varphi_n(x) \\
&\equiv \lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\, \alpha(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)
\end{aligned} \tag{5.3.25}$$

を考えて実行される．ここで，$f(x)$ は任意の $x = \infty$ で速やかに 0 に近づく $f(0) = 1$ を満たす関数である．この条件 $f(0) = 1$ はまず最初に $M \to \infty$ とすると，出発点となる正則化されていない式にもどり，正則化関数に要求される最低限の条件である．$\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)$ は，十分正則化された演算子なので，ゲージ場依存性を取り出すために平面波を用いると，$\alpha(x)$ を含む座標に関する積分を省略した記法で

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\, \gamma_5 f(\not{D}^2/M^2) \\
&\equiv \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\varphi_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx}\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2) e^{ikx} \\
&= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_5 f\{(ik_\mu + D_\mu)^2/M^2 - \frac{ig}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}/M^2\}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\, M^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_5 f\{(ik_\mu + D_\mu/M)^2 - \frac{ig}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}/M^2\} \tag{5.3.26}$$

で与えられる．ここで，残っているトレースは，Dirac の $\gamma$ 行列とゲージ場の群の添え字に関するトレースを意味する点が量子電磁力学の場合とは異なっている．また

$$\begin{aligned} \not{D}^2 &= \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}D_\mu D_\nu + [\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu \\ &= D_\mu D^\mu - \frac{ig}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

の関係式を用い，積分変数のスケール変換 $k_\mu \to Mk_\mu$ を行った．

(5.3.26) で $1/M$ に関するべき展開の後に，$\mathrm{tr}\,\gamma_5 = \mathrm{tr}\,\gamma_5[\gamma^\mu,\gamma^\nu] = 0$ に注意すれば，

$$\begin{aligned} \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\,\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2) &= \mathrm{tr}\,\gamma_5 \frac{1}{2!}\left\{\frac{-ig}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right\}^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f''(-k_\mu k^\mu) \\ &= \frac{g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

が得られる．ただし，反対称シンボルの規格化 $\epsilon^{1234} = 1$ と

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f''(-k_\mu k^\mu) &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty f''(x)x dx \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

を用いた．現在のメトリックの規約では $x = -k_\mu k^\mu > 0$ である．この積分で，$k_\mu \to Mk_\mu$ のスケール変換をする前の運動量変数に対しては，任意の有限な区間 $-L \leqq k_\mu \leqq L$ からの積分への寄与は 0 になることがわかる．この意味で，大きな運動量すなわち短距離が量子異常を決めることがわかる．この積分の値は，途中の計算の不定性を除く目的で導入された正則化の関数 $f(x)$ が

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0, \quad f'(x)x|_{x=0} = f'(x)x|_{x=\infty} = 0 \tag{5.3.30}$$

を満たす限り $f(x)$ の具体的な関数形には依存しないのも電磁力学の場合と同様である．

このようにしてカイラル変換に対するヤコビアンは，残っているトレースがYang-Millsの添え字にわたるものとして

$$J = \exp\left[-2i\int d^4x\alpha(x)\frac{g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right] \tag{5.3.31}$$

のように計算される．したがって，カイラル変換に関する恒等式は量子電磁力学の場合と同様の手順で第4章の源 $\eta(x), \bar{\eta}(x)$ を含めた記法で

$$\begin{aligned}\partial_\mu\langle\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_J &= \langle 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi(x) + 2i\frac{g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x) \\ &\quad -i\bar{\eta}(x)\psi(x) - i\bar{\psi}(x)\eta(x)\rangle_J\end{aligned} \tag{5.3.32}$$

のように求められる[*1]．

ちなみに，(5.3.28)の計算は任意の偶数 $d = 2n$ 次元に一般化され

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}f(\not{D}^2/M^2) \\ &= \mathrm{tr}\,\frac{\gamma_{2n+1}}{n!}\left\{\frac{-ig}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right\}^n\int\frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}}f^{(n)}(-k_\mu k^\mu) \\ &= \frac{g^2}{(4\pi)^n n!}\,\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n}}F_{\mu_1\mu_2}\cdots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

で与えられる[*2]．

## 5.4 インスタントン

Euclid化された非Abel的なゲージ理論には，Abel的なゲージ理論にない基本的な現象としてインスタントン(instanton)という一種の古典解が現われる．このインスタントンは場の理論の一つの真空からもう一つの真空へのトンネル効果を記述し重要である．この古典解とカイラル量子異常を組み合わせると指数定理と呼ばれるFermi粒子の0固有値解の個数とインスタントン数(あるいはPontryagin数)との間の関係が導かれる．

まず，インスタントン解の概要を説明したい．現在のEuclid理論では場の変数は座標と同時に

*1 Minkowski計量に戻すと，$\epsilon^{1230} = 1$ として異常項の前の虚数 $i$ がない式が得られる．

*2 ただし，$\gamma_{2n+1} = (-i)^n\gamma^1\ldots\gamma^{2n}$ および $\epsilon^{12\cdots 2n} = 1$ とする．

$$x^0 \to -ix^4, \quad x_0 \to ix_4,$$
$$A^0(x) \to -iA^4(x), \quad A_0(x) \to iA_4(x) \tag{5.4.1}$$

のように置き換えをして，$A^4$ とか $x^4$ などを実数の量とみなしている．したがって，Euclid 時空の計量は $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ となり，例えば

$$A_\mu A^\mu = -A_1A_1 - A_2A_2 - A_3A_3 - A_4A_4 \leqq 0 \tag{5.4.2}$$

となる．このとき，ゲージ場の作用は

$$S_E \equiv -\frac{1}{4g^2}\int d^4x[\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu]$$
$$\times[\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + f^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu}] \leqq 0 \tag{5.4.3}$$

となることが確かめられる．ただし，

$$gA_\mu \to A_\mu \tag{5.4.4}$$

のように，結合定数を場の変数に含める記法を用いた．量子力学ではトンネル効果を議論するときに虚数の時間が用いられるが，現在の場の理論でも同様である．特に作用の停留点に対応する古典解はトンネル効果が最も起こりやすい道を指定することになり重要である．このような作用の停留点を与える古典解がインスタントンである．

### インスタントン解*3

この解を説明するために，ゲージ群としては $SU(2)$ を選ぶ．このとき $SU(2)$ に値を持つ任意のゲージ変換の要素は

$$g(x) = \exp[i\sum_{a=1}^{3}\omega^a(x)T^a] = a(x) + i\vec{b}(x)\vec{\tau} \in SU(2)$$
$$g(x)g^\dagger(x) = a(x)^2 + (\vec{b}(x))^2 = 1 \tag{5.4.5}$$

のように 4 個の実数の関数 $(a(x), \vec{b}(x))$ と 3 個の Pauli 行列 $\vec{\tau}$ を用いて書くことができる．作用積分 $S_E$ が有限になることを要請すると，時空間の無限遠点 $|x| \to \infty$ で $F^a_{\mu\nu}(x) \to 0$ となることが要求される．ゲージ場の作用 $S_E$ はゲージ変換で変化しないことを考慮すると，$A_\mu(x)$ は真空 $A_\mu(x) = 0$ とゲージ同値な配位に近づく必要がある．

*3　本書で実際に用いるのは，(5.4.14) を満たす解が存在するという事実だけである．

$$A_\mu(x) \to_{|x|\to\infty} ig(x)\partial_\mu g^\dagger(x). \tag{5.4.6}$$

このような条件を満たす**インスタントン解**は具体的には

$$A_\mu(x) \equiv \frac{r^2}{r^2+\rho^2} ig(x)\partial_\mu g^\dagger(x) \tag{5.4.7}$$

で与えられる．この式で $\rho$ は実の定数であり

$$\begin{aligned} r^2 &\equiv |x|^2 = (x^4)^2 + \vec{x}^2 \\ g(x) &\equiv (x^4 + i\vec{x}\vec{\tau})/r \equiv \hat{x}^4 + i\hat{\vec{x}}\vec{\tau} \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

を定義した．$\vec{x}$ は時空の空間座標を表す．このときインスタントン解を表す $A_\mu$ は $r \to \infty$ で実際

$$A_\mu = ig(x)\partial_\mu g^\dagger(x) + O(1/r^2) \tag{5.4.9}$$

の振る舞いを示し，第 1 項自身は $1/r$ の大きさ，すなわち現在の記法では $O(1/r)$ である．

条件 $a(x)^2 + (\vec{b}(x))^2 = 1$ から群 $SU(2)$ の要素 $g(x)$ は $(a, \vec{b})$ を座標とする仮想的な 4 次元空間の単位超球面(これは $S^3$ と書かれる)と同一視できる．他方インスタントン解の構成に用いられる $g(x) = \hat{x}^4 + i\hat{\vec{x}}\vec{\tau}$ では，Euclid 化された 4 次元時空間内の単位超球面(これも $S^3$ である)の上の点と群 $SU(2)$ の要素 $g(x)$ が描く超球面が 1 対 1 対応していることを示している．すなわち，時空間の座標 $(x^4, \vec{x})$ が $S^3$ を 1 回覆うときに $g(x)$ はゲージ空間内の $S^3$ を 1 回覆うことを示している．このような位相的な性質を表す量が**巻きつき数** (winding number) と呼ばれるものである．実際上記の特殊な $g(x)$ に対しては巻きつき数 $\nu$ は，$\epsilon^{1234} = 1$ で規格化された完全反対称シンボル $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ を用いて

$$\nu = \frac{1}{24\pi^2} \operatorname{Tr} \int \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (g\partial_\nu g^{-1})(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1}) dS_\mu \tag{5.4.10}$$

で与えられる．ただし積分は 4 次元時空間の無限遠の境界である超球面 $S^3$ 上の表面積分を表し，$dS_\mu$ は $\mu$ 方向の座標軸に直交する面積要素を表す．事実，$x^4 = \infty$ すなわち点 $\hat{x}^4 = 1,\ \hat{x}^1 = \hat{x}^1 = \hat{x}^1 = 0$ の近傍では巻きつき数 $\nu$ を定義する積分の要素は

$$\frac{3!}{24\pi^2}(-i)^3\epsilon^{4123}\,\mathrm{Tr}\,(\tau^1\tau^2\tau^3)d\hat{x}^1d\hat{x}^2d\hat{x}^3=\frac{1}{2\pi^2}d\hat{x}^1d\hat{x}^2d\hat{x}^3 \qquad (5.4.11)$$

のように書かれる．すなわち，超球面上の任意の点の近傍で積分の要素は単位超球面の面積要素を $2\pi^2$ で割ったものを与える．単位超球面の面積(通常の意味での体積)は $2\pi^2$ であることを考慮して全超球面上で積分すると，巻きつき数は $\nu=1$ で与えられることになる．

さらに巻きつき数 $\nu$ を定義する式で $g(x)$ の代わりに

$$g(x)=[(x^4+i\vec{x}\vec{\tau})/r]^n \qquad (5.4.12)$$

を用いると，巻きつき数 $\nu=n$ が得られることが示される．また $\nu=-1$ の反インスタントンは，この式で $n=-1$ あるいは $g(x)=[(x^4+i\vec{x}\vec{\tau})/r]^\dagger$ を用いて得られる．

巻きつき数 $\nu$ は上記のインスタントン解を用いて

$$\nu=\frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\int\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}d^4x \qquad (5.4.13)$$

のように書くことができる．事実，ここに現われる被積分関数は次のように全微分に書かれ[*4]，Gauss の定理を用いて積分は無限遠の超球面上の積分に変形される．

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int\partial_\mu[\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(A_\nu\partial_\alpha A_\beta-i\frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)]d^4x\\ &= \frac{1}{24\pi^2}\,\mathrm{Tr}\int\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(g\partial_\nu g^{-1})(g\partial_\alpha g^{-1})(g\partial_\beta g^{-1})dS_\mu \qquad (5.4.14)\end{aligned}$$

最後の式はインスタントン解の遠方での振る舞いを用いて得られる．すなわち，これまで議論してきた巻きつき数の定義に一致することがわかる．

最後に，これまで用いたインスタントン解が実際 Yang–Mills 方程式を満たすことを示すために，$\tilde{F}_{\mu\nu}=(1/2)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ を定義して次の Schwarz の不等式に注意する．

---

*4　これは，Jacobi の恒等式 $\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu,A_\nu][A_\alpha,A_\beta]=\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu[A_\nu,[A_\alpha,A_\beta]]=0$ を用いて示される．ここで現われる $K^\mu\equiv\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(A_\nu\partial_\alpha A_\beta-i\frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)$ は **Chern–Simons** 形式と呼ばれる基本的な量である．

$$\int d^4x F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} = \left[ \left( \int d^4x F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \right) \left( \int d^4x \tilde{F}^a_{\mu\nu} \tilde{F}^a_{\mu\nu} \right) \right]^{1/2}$$
$$\geqq \left| \int d^4x F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^a_{\mu\nu} \right| \qquad (5.4.15)$$

この式の右辺で巻きつき数の式を用いると

$$\frac{1}{4g^2} \int d^4x F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \geqq \frac{8\pi^2}{g^2} |\nu| \qquad (5.4.16)$$

が得られ，等号は

$$F^a_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}^a_{\mu\nu} \qquad (5.4.17)$$

の場合にのみ成立し，$\pm$ は巻きつき数 $\nu$ の正負に対応している．この式で $+$ 符号を選んで，$A_\mu = if(r^2)g(x)\partial_\mu g^\dagger(x)$ を代入すると

$$f(r^2)^2 - f(r^2) = -r^2 f'(r^2) \qquad (5.4.18)$$

が得られ，この式はインスタントン解に用いた $f(r^2) = r^2/(r^2+\rho^2)$ により満たされることが確かめられる．

すなわち，インスタントン解は巻きつき数 $\nu = 1$ を与え，また同時に $\nu = 1$ の場合の作用積分の最小値を与える．作用の停留値を与える場はその作用から導かれる方程式の解になるので，インスタントン解は実際 Yang-Mills 方程式の解になることが示されたことになる．

インスタントン解

$$A_\mu(x) \equiv \frac{r^2}{r^2+\rho^2} ig(x)\partial_\mu g^\dagger(x) \qquad (5.4.19)$$

は，$x^4 = \pm\infty$ で真空状態とゲージ同値な $ig(x)\partial_\mu g^\dagger(x)$ に近づく．またここに現われる $g(x)$ は，境界条件 $g(\infty) = 1$ を満たす "小さな" ゲージ変換の重ね合わせでは表現できないものである．物理的には $x^4 = -\infty$ で 1 つの真空から出発して Euclid 化された虚時間に沿ってトンネル効果を起こして，$x^4 = \infty$ でもう 1 つの真空へ遷移すると解釈される．（この理由で，通常のソリトン解とは異なり時間的にも瞬時に生まれて消えるという意味合いで instant-on という名前で呼ばれている．）このとき作用積分の値 $S_E = -8\pi^2/g^2$ の絶対値がトンネル効果の障壁の高さを表し，経路積分ではこの作用を指数の肩に乗せた

$$e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} \qquad (5.4.20)$$

がトンネル効果の確率(の主要項)を与えると考えられる．

すなわち，ゲージ理論の真空は周期的な(高い)ポテンシャルの中を運動する電子の運動と類似の構造を持つことになり，Bloch 波と類似の波動関数により記述される．事実 Euclid 化されたゲージ理論の経路積分は

$$\langle\theta,+\infty|\theta,-\infty\rangle=\sum_{\nu}\int d\mu_\nu \exp\left[i\nu\theta+S_E\right] \tag{5.4.21}$$

で表されることが(ここでは詳細は議論しないが)示される．この式で $\nu$ に関する和はすべての正負の整数にわたるが，$\nu=1$ に対応する項がこれまで議論してきたインスタントン解の寄与である．一般の $\nu$ は多インスタントン解の寄与である．ここで現われる実のパラメター $\theta$ は任意の定数であり，真空状態 $|\theta,\pm\infty\rangle$ は $\theta$ 真空と呼ばれている．経路積分の測度 $d\mu_\nu$ に含まれるゲージ場は $A_\mu(x)=A_\mu(x)_{(\nu)}+a_\mu(x)$ のように，与えられたインスタントン数 $\nu$ を持つ解 $A_\mu(x)_{(\nu)}$ とその周りの揺らぎ $a_\mu(x)$ を用いて表される[*5]．Bloch 波との類似で言えば，経路積分の肩に現われた $\exp[i\theta\nu]$ において，$\nu$ が電子の位置座標(の差)に対応し実数のパラメター $\theta$ は Bloch 運動量と呼ばれるものに対応する．

無限小の定数のパラメター $\alpha$ を用いた Fermi 粒子の変数変換

$$\psi(x)\to e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x),\quad \bar\psi(x)\to\bar\psi(x)e^{i\alpha\gamma_5} \tag{5.4.22}$$

を行うと，経路積分の測度はヤコビアンの計算 (5.3.32) から

$$d\mu_\nu\to e^{-2i\alpha\nu}d\mu_\nu \tag{5.4.23}$$

のように変換され，パラメター $\theta$ は

$$\theta\to\theta-2\alpha \tag{5.4.24}$$

のように変換される．同時に作用積分が

$$S_E\to S_E-2i\alpha\int d^4x m\bar\psi(x)\gamma_5\psi(x) \tag{5.4.25}$$

のように変化する．このことから，質量が 0 の Fermi 粒子を含む理論では $\theta$ の値は任意に変化させることができ，$\theta$ は物理的な意味を持たなくなることがわかる．

---

*5　$\nu=1$ のインスタントン解は中心の位置とか大きさのパラメター $\rho$ などを含めて 8 個の変形パラメターを含んでおり，これらのパラメターに関する積分も経路積分では同時に行う必要がある．また，一般の単純群に関しては，その群に含まれる $SU(2)$ 部分群の各々に対してインスタントン解が構成され，それ以外には解がないことが知られている．

## 5.5 Atiyah-Singer の指数定理

さて，量子異常の議論にもどり，ヤコビアンの計算

$$
\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f((\lambda_n)^2/M^2)\varphi_n(x)\\
&=\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\varphi_n(x)\\
&\equiv\lim_{M\to\infty}\mathrm{Tr}\,\alpha(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\\
&=\int d^4x\alpha(x)\frac{g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{5.5.1}
$$

を見直す．この一般的な式で $\alpha$ を定数に選んだ大局的(global)なカイラル変換を考えると，この式の両辺は

$$
\sum_{\lambda_n=0}\int d^4x\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f((\lambda_n)^2/M^2)\varphi_n(x)=\int d^4x\frac{g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}
\tag{5.5.2}
$$

と書ける．ただし，$\not{D}\gamma_5+\gamma_5\not{D}=0$ から導かれる $\lambda_n\neq 0$ の固有関数に対する

$$
\begin{aligned}
&\not{D}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n(x),\quad \not{D}\gamma_5\varphi_n=-\lambda_n\gamma_5\varphi_n(x),\\
&\int d^4x\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)=0\quad \text{for}\quad \lambda_n\neq 0
\end{aligned}
\tag{5.5.3}
$$

の関係式を用いた．このようにして(5.5.2)は $f(0)=1$ に注意すると

$$
n_+-n_-=\nu \tag{5.5.4}
$$

と書けることがわかる．ここで $n_\pm$ はそれぞれ Dirac の作用素 $\not{D}$ の 0 固有値の固有状態で

$$
\not{D}\varphi_n(x)=0,\quad \gamma_5\varphi_n=\pm\varphi_n \tag{5.5.5}
$$

を満たすものの数を表し，(5.5.4) の右辺はインスタントン数(あるいは，正しくは Pontryagin 数と呼ばれる)を表す．

この Dirac 演算子の 0 固有値に対応する固有状態の数とゲージ場の位相的な性質の間に成立する関係式 $n_+-n_-=\nu$ は，数学では Atiyah-Singer の指数定理として知られている．ただし，数学ではわれわれが議論している Euclid 的

な4次元空間ではなく，有界(compact)な4次元の超球面 $S^4$ 上で定義されたDirac作用素に対してこの定理が証明される．したがって，われわれの例では必ずしもこの関係式は保証されているわけではないが，実際の4次元のインスタントンが存在する場合のDirac方程式の分析から4次元のEuclid化された時空でこの関係式が成立することが確かめられている．これに反して，積分する以前の関係式，すなわち局所的な量子異常(local anomaly)の関係式はより一般の状況の下で成立する．いずれにしても，この指数定理はわれわれの経路積分におけるヤコビアンの扱いが非常に一般的なものであることの一つの支持を与えるものと考えられる．

この指数定理は次の形にも書くことができる．

$$a \equiv \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \not{D} \tag{5.5.6}$$

を定義し，$\gamma_5 \not{D} + \not{D}\gamma_5 = 0$ を用いると

$$\begin{aligned} aa^\dagger &= \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \not{D}^2 \\ a^\dagger a &= \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \not{D}^2 \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

が成立し，$(1\pm\gamma_5)/2$ が射影演算子，すなわち $[(1\pm\gamma_5)/2]^2 = (1\pm\gamma_5)/2$ を満たすことに注意すると指数定理は

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}\, e^{-\frac{aa^\dagger}{M^2}} - \mathrm{Tr}\, e^{-\frac{a^\dagger a}{M^2}} \\ &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \exp\left[-\frac{\not{D}^2}{M^2}\right] - \mathrm{Tr}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \exp\left[-\frac{\not{D}^2}{M^2}\right] \\ &= \mathrm{Tr}\,\gamma_5 \exp\left[-\not{D}^2/M^2\right] = \nu \quad \text{for} \quad M \to \quad \text{large} \end{aligned}$$

と書かれる．このように書いたAtiyah–Singerの指数定理は，われわれが第3章で議論した光の位相演算子の問題に現われた指数定理 (3.5.8) と同じ形を持つことがわかる．

## 5.6　相互作用表示とNambu–Goldstoneの定理

ここで指数定理の二つの応用を述べたい．一つは場の理論一般にたいするも

のであり，他方は Nambu-Goldstone の定理に関するものである．

### 相互作用表示へのユニタリー変換の問題

まず場の理論におけるいわゆる相互作用表示に関する応用を議論する．われわれの量子異常の定式化では Fermi 粒子の場を

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n \varphi_n(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \bar{b}_n \varphi_n^\dagger(x) \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

のように，エルミートな演算子 $\not{D}$ の固有関数

$$\begin{aligned} \not{D}\varphi_n(x) &= \lambda_n \varphi_n(x) \\ \int d^4x \varphi_n^\dagger(x)\varphi_l(x) &= \delta_{n,l} \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

で展開した．この展開は Fermi 粒子の Dirac 作用を対角化する．

$$\int \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi d^4x = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(i\lambda_n - m)\bar{b}_n a_n \tag{5.6.3}$$

この意味で，上記の展開は演算子形式での Heisenberg 表示に対応すると見なされる．また無限小のカイラル変換に対して次のヤコビアン

$$J = \exp\left[-2i\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x \alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\right] \tag{5.6.4}$$

が得られた．

他方，経路積分の定義式で Fermi 粒子の場を

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n \xi_n(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \bar{b}_n \xi_n^\dagger(x) \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

のように，エルミートな演算子 $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$ の固有関数

$$\begin{aligned} &\not{\partial}\xi_n(x) = \kappa_n \xi_n(x), \\ &\int d^4x \xi_n^\dagger(x)\xi_l(x) = \delta_{n,l} \end{aligned} \tag{5.6.6}$$

の完全系で展開することも可能である．この展開は自由な Fermi 粒子の Dirac 作用を対角化する．

$$\int \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi d^4x = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(i\kappa_n - m)\bar{b}_n a_n \tag{5.6.7}$$

この意味で，この展開は演算子形式の相互作用表示に対応すると考えられる．この場合にはカイラル変換に関するヤコビアンは

$$J = \exp\left[-2i\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\alpha(x)\xi_n^\dagger(x)\gamma_5\xi_n(x)\right] \tag{5.6.8}$$

で与えられる．しかし，この第二のヤコビアンはゲージ場に関する情報を一切運ばないので，この式から出発して量子異常を導くことは不可能である．

この現象は，関数系 $\{\varphi_n(x)\}$ から素朴な相互作用表示 $\{\xi_n(x)\}$ へのユニタリー変換は一般には成立しないことを示している．指数定理を用いると

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x) = n_+ - n_- \neq 0 \tag{5.6.9}$$

であるが，他方

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\xi_n^\dagger(x)\gamma_5\xi_n(x) = 0 \tag{5.6.10}$$

であり，0でない整数を0へスムーズにユニタリー変換できないことを示している．このことから，正確な恒等式を定式化するには**Diracの作用を対角化する関数の完全系**を用いる必要があることが結論される．われわれの量子異常の計算においては，自由場へのユニタリー変換を十分よく正則化された演算子(5.3.26)

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f(D\!\!\!\!/^2/M^2)\varphi_n(x) \tag{5.6.11}$$

においてのみ用いた．自由場を用いた計算では，指数の効果は紫外の高い振動数の効果から生まれ，このことが量子異常が紫外発散の扱いと密接に関係していた理由である．しかし，対称性の量子的破れ(量子異常)自身は有限であり，発散とは無関係の量である．

### Nambu-Goldstoneの定理

次に，量子異常とNambu-Goldstoneの定理との関連を議論したい．要点は量子異常とインスタントン効果で大局的な対称性 (global symmetry) がすでに破れている場合には，たとえその大局的な対称性が自発的に壊れても質量0の

Nambu-Goldstone 粒子が一般には現れないことである．この問題を QCD のラグランジアンに基づいて議論する．QCD の経路積分は

$$\langle\theta|\theta\rangle = \sum_{\nu} \int d\mu_\nu \exp\left\{i\theta\nu + \int [\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}]d^4x\right\} \tag{5.6.12}$$

で与えられ，ゲージ群は $SU(3)$ である．インスタントン効果を考慮した $\theta$ 真空 $|\theta\rangle$ を用いた．現実の QCD では $u, d, s$ という最低 3 個のクォークを考える必要があるが，指数と自発的な対称性の破れが競合する $U(1)$ 問題あるいは $\eta'$ の問題では，問題の主要点は 1 個のクォークで議論できるので，この簡単化された作用で議論を進める．ここに現れる作用積分でクォークの質量 $m = 0$ の場合を考えると，作用は $\alpha$ を定数とする次の大局的なカイラル変換で形を変えない

$$\psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x), \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha\gamma_5} \tag{5.6.13}$$

この対称性に基づくカイラル恒等式を導くには，パラメターを $\alpha(x)$ のように時空間に依存する局所的なパラメターに一般化しておいて，次の恒等式(すなわち積分変数の名前の付け方に積分の値は依存しない)を用いる．

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu} \int d\mu_\nu \bar{\psi}(y)\gamma_5\psi(y) \exp\left\{i\theta\nu + \int [\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi]d^4x + S_{\rm YM}\right\}\\ &= \sum_{\nu} \int d\mu'_\nu \bar{\psi}'(y)\gamma_5\psi'(y) \exp\left\{i\theta\nu + \int [\bar{\psi}'(i\not{D} - m)\psi']d^4x + S_{\rm YM}\right\}\end{aligned} \tag{5.6.14}$$

ただしこれからの議論のために，$\langle\theta|\bar{\psi}(y)\gamma_5\psi(y)|\theta\rangle$ に対応する経路積分を書いた．この等式で $\alpha(x)$ を無限小のパラメターとして

$$\bar{\psi}'(y)\gamma_5\psi'(y) = \bar{\psi}(y)\gamma_5\psi(y) + 2i\alpha(y)\bar{\psi}(y)\psi(y) \tag{5.6.15}$$

および作用積分と積分の測度の変化

$$\begin{aligned}&\int \bar{\psi}' i\not{D}\psi' d^4x = \int \bar{\psi} i\not{D}\psi d^4x + \int \alpha(x)\partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x))d^4x\\ &\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = \exp\left[-2i\int d^4x\alpha(x)\frac{g^2}{32\pi^2}\,{\rm tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right]\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\end{aligned} \tag{5.6.16}$$

に注意して，$\alpha(x)$ の一次の項を集め $\alpha(x)$ で関数微分すると恒等式

$$\partial_\mu^x \langle\theta|T^*(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x))\bar{\psi}(y)\gamma_5\psi(y)|\theta\rangle - 2i\langle\theta|T^*\partial_\mu K^\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma_5\psi(y)|\theta\rangle$$
$$= -2i\delta(x-y)\langle\theta|\bar{\psi}(y)\psi(y)|\theta\rangle \tag{5.6.17}$$

が得られる．ただし Chern-Simons 形式 $K^\mu$ を用いて

$$\begin{aligned}\partial_\mu K^\mu(x) &\equiv \frac{1}{8\pi^2}\partial_\mu \,\mathrm{tr}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(A_\nu\partial_\alpha A_\beta - \frac{2i}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)\\ &= \frac{g^2}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)\end{aligned} \tag{5.6.18}$$

と書けることを用いた．

さて，カイラル対称性の自発的な破れを議論するために，上で導いたカイラルスカラー密度 $\bar{\psi}(y)\gamma_5\psi(y)$ の変換式 (5.6.15) で $\alpha$ を定数においた

$$\langle\theta|\bar{\psi}'(y)\gamma_5\psi'(y)|\theta\rangle = \langle\theta|\bar{\psi}(y)\gamma_5\psi(y)|\theta\rangle + 2i\alpha\langle\theta|\bar{\psi}(y)\psi(y)|\theta\rangle \tag{5.6.19}$$

を考察する．真空がカイラル変換に関して不変であるということは左辺と右辺の第 1 項が等しいということであり，したがって右辺の第 2 項が 0 になる．他方，自発的にカイラル対称性が破れるということは，真空がカイラル不変でなくなることであり

$$\langle\theta|\bar{\psi}(0)\psi(0)|\theta\rangle \neq 0 \tag{5.6.20}$$

を意味する．ただし真空状態の並進不変性を用いた．自発的な対称性の破れは，物性論での 2 次の相転移に対応し一般に秩序パラメター(order parameter)で特徴づけられる．カイラル対称性の自発的な破れの秩序パラメターはしたがって $\langle\theta|\bar{\psi}(y)\psi(y)|\theta\rangle$ で与えられる．

まず量子異常が存在しない素朴なカイラル恒等式が成立する場合には

$$\partial_\mu^x\langle\theta|T^*(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x))\bar{\psi}(0)\gamma_5\psi(0)|\theta\rangle = -2i\delta(x)\langle\theta|\bar{\psi}(0)\psi(0)|\theta\rangle \tag{5.6.21}$$

あるいはこの式を Fourier 変換した

$$-ip_\mu\int dx e^{ipx}\langle\theta|T^*(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x))\bar{\psi}(0)\gamma_5\psi(0)|\theta\rangle$$
$$= -2i\langle\theta|\bar{\psi}(0)\psi(0)|\theta\rangle \neq 0 \tag{5.6.22}$$

が極限 $p_\mu \to 0$ でも成立する．したがって左辺の振幅は $1/p^2$ の極を含むことが結論され，模式的に $f_\pi$ を定数として

$$(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi)(p) = f_{\pi}\frac{p^{\mu}}{p^2} + \text{non-pole} \quad \text{parts} \tag{5.6.23}$$

という構造を持つ．すなわち，軸性カレント $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi$ が極 $1/p^2$ で示されている質量 0 のスカラー粒子の微分を含み，この粒子が Nambu-Goldstone 粒子と呼ばれるものである（**Nambu-Goldstone の定理**）．

他方，現実の量子異常を含む恒等式(5.6.17)では，両辺を積分すると（これは極限 $p_{\mu} \to 0$ に対応する）

$$\begin{aligned}
&\lim_{p_{\mu}\to 0} -ip_{\mu}\int e^{ipx}\langle\theta|T^{*}(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma_5\psi(x))\bar{\psi}(0)\gamma_5\psi(0)|\theta\rangle \\
&\quad -2i\int dx\langle\theta|T^{*}\partial_{\mu}K^{\mu}(x)\bar{\psi}(0)\gamma_5\psi(0)|\theta\rangle \\
&\quad = -2i\langle\theta|\bar{\psi}(0)\psi(0)|\theta\rangle \neq 0
\end{aligned} \tag{5.6.24}$$

が得られる．インスタントン数が 0 でない場合には左辺の第 2 項は 0 にならず，したがって $(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi)(p)$ に質量 0 の粒子が含まれていることは一般に結論できない．あるいは，改めて軸性カレントを

$$\tilde{J}^{\mu}(x) \equiv \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5\psi(x) - 2iK^{\mu}(x) \tag{5.6.25}$$

で定義すると形式的に Nambu-Goldstone 粒子が $\tilde{J}^{\mu}$ に含まれるように思われるが，このカレント $\tilde{J}^{\mu}$ は，Chern-Simons 形式 $K^{\mu}$ が QCD の $SU(3)$ ゲージ変換の下で不変でないので，物理的なゲージ不変な粒子を定義できない．

この考察から，量子異常とインスタントンの効果で大局的なカイラル対称性が壊れている場合には Nambu-Goldstone の定理は一般に成立しないことが結論される．このことが，現実の QCD で軽い擬スカラー中間子 $\eta'$ が存在しない理由と考えられている．

# 6 ゲージ対称性の量子的破れ

この章では，ゲージ対称性そのものに現われる量子異常を議論する．この量子異常はベクトル型と軸性ベクトル型のゲージ場が混在するゲージ理論において一般に現われる．その特別な場合のパリティ対称性を破るカイラルなゲージ理論が応用上も重要である．ゲージ対称性が量子異常で破れているということは，ゲージ理論としての確率の保存(ユニタリー性) が破れ，またより高次の量子補正の計算を矛盾なく遂行することができないということを示している．すなわち，この量子異常が出ないという条件が，カイラルなゲージ理論が量子論として矛盾せずに定義できる条件になり，Weinberg-Salam 理論では，許されるクォークとかレプトンに強い制約を課すことになる．この量子異常そのものは，また非線形 $\sigma$ 模型などへの重要な応用がある．この応用と関連して積分可能性(Wess-Zumino 条件)という興味ある制約がでる．実際の計算としては，この積分可能性条件を満たさず，異常項がゲージ不変な形で現われる共変量子異常がずっとやさしい．したがって，共変量子異常を積分可能な量子異常に変換する処方が重要になる．またカレント代数との関連では，量子異常が異常交換関係に導くことを説明する．

## 6.1 軸性ベクトル場を含むゲージ理論

Euclid 化された経路積分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[\int \bar{\psi} i \not{D} \psi d^4x\right] \tag{6.1.1}$$

を考える．ここでの Dirac 行列の規約は QED の場合と同様に，$\gamma^\mu$ 行列は反エ

ルミート的であり,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} = -2\delta^{\mu\nu} \tag{6.1.2}$$

が成立し,

$$\gamma_5 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = \gamma_5^\dagger, \quad (\gamma_5)^2 = 1 \tag{6.1.3}$$

を満たす $\gamma_5$ はエルミート的である．共変微分 $D_\mu$ は

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu - \sum_a (iV_\mu^a T^a + iA_\mu^a T^a \gamma_5)) \equiv \gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu - iA_\mu\gamma_5) \tag{6.1.4}$$

のように非 Abel 的な群のエルミートな生成演算子 $T^a$

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{6.1.5}$$

を用いて定義される．非 Abel 的なゲージ場は生成演算子の数と同じ数の成分を持つ．記法を簡単にするために，ゲージ場に結合定数を含ませて $gV_\mu^a \to V_\mu^a$ のように書くことにする．また，今後は同じ添え字が 2 回現れるときには，断らない限りその添え字について和をとるものとする．あるいは最後の表式のように $V_\mu = V_\mu^a T^a$ および $A_\mu = A_\mu^a T^a$ と書かれる場合も多い．

この章では，これまで議論してきたベクトル的な場(vector field)を $V_\mu^a$ で表し，Dirac の $\gamma_5$ 行列を伴って現われる軸性ベクトル場(axial-vector field)を $A_\mu^a$ で表示する．ゲージ場の場の強さのテンソル $V_{\mu\nu}^a$ と $A_{\mu\nu}^a$（電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ の一般化)は次式で定義される．

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] &= -i(\partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a + f^{abc}V_\mu^b V_\nu^c + f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)T^a \\ &\quad -i(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc}V_\mu^b A_\nu^c + f^{abc}A_\mu^b V_\nu^c)T^a\gamma_5 \\ &\equiv -iV_{\mu\nu} - iA_{\mu\nu}\gamma_5 \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Fermi 粒子の作用は，次のゲージ変換に関して不変である．

$$\begin{aligned}&\psi(x) \to \psi'(x) = \exp[i\alpha(x) + i\beta(x)\gamma_5]\psi(x) \\ &\bar\psi(x) \to \bar\psi'(x) = \bar\psi \exp[-i\alpha(x) + i\beta(x)\gamma_5] \\ &\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu - iA_\mu\gamma_5) \to \\ &\gamma^\mu(\partial_\mu - iV'_\mu - iA'_\mu\gamma_5) \equiv \exp[i\alpha(x) - i\beta(x)\gamma_5]\not{D}\exp[-i\alpha(x) - i\beta(x)\gamma_5]\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

あるいは最後の式は

$$D_\mu \to D'_\mu = \exp\left[i\alpha(x) + i\beta(x)\gamma_5\right] D_\mu \exp\left[-i\alpha(x) - i\beta(x)\gamma_5\right] \tag{6.1.8}$$

と書ける．ただし，

$$\alpha(x) = \alpha^a(x)T^a, \quad \beta(x) = \beta^a(x)T^a \tag{6.1.9}$$

である．この式から通常のゲージ変換にさらに $\gamma_5$ 行列がからんでおり，ゲージ変換の一般化になっていることがわかる．

さて，Euclid 化された理論で Dirac の演算子を考えると，現在のベクトル場 $V_\mu$ と軸性ベクトル場 $A_\mu$ を含む演算子

$$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu - iA_\mu\gamma_5) \tag{6.1.10}$$

は，次の内積に対しては

$$\begin{aligned}(\Psi, \not{D}\Phi) &\equiv \int d^4x \Psi^\dagger(x)\,\not{D}\Phi(x) \\ &= \int d^4x \{\gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu + iA_\mu\gamma_5)\Psi(x)\}^\dagger \Phi(x) \\ &\neq \int d^4x (\not{D}\Psi)^\dagger(x)\Phi(x)\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

のように軸性ベクトル場 $A_\mu$ の符号が変化し，エルミート的にはならない．しかし，軸性ベクトル場 $A_\mu$ を

$$A_\mu(x) \to -iA_\mu(x) \tag{6.1.12}$$

のように純虚数の場に変換した

$$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu - A_\mu\gamma_5) \tag{6.1.13}$$

は

$$(\Psi, \not{D}\Phi) = (\not{D}\Psi, \Phi) \tag{6.1.14}$$

を満たし，エルミート的になる．しかし，軸性ベクトル場 $A_\mu$ を虚数にした代償として軸性のゲージ変換が損なわれることになる．この性質が，軸性のゲージ対称性が経路積分で損なわれる原因と理解することができる．このエルミートな演算子 $\not{D}$ を用いて，正規直交関数系

$$\not{D}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x), \quad \int d^4x \phi_n^\dagger(x)\phi_m(x) = \delta_{n,m} \tag{6.1.15}$$

を定義して，Fermi 粒子の場を

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x)$$
$$\bar{\psi(x)} = \sum_n \bar{b}_n \phi_n^\dagger(x) \tag{6.1.16}$$

のように展開すると，経路積分は

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \;\exp\left[\int \bar{\psi}(i\not{D})\psi d^4x\right] = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} d\bar{b}_n da_n \exp\left[i\sum_{n=1}^{N}\lambda_n \bar{b}_n a_n\right] \tag{6.1.17}$$

のように(形式的にではあるが)厳密に積分できる形に書かれる．このとき，Fermi 粒子のゲージ変換(6.1.7)に対するヤコビアン

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' = J\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \tag{6.1.18}$$

は

$$\begin{aligned}
\ln J &= \lim_{N\to\infty}(-2i)\sum_{n=1}^{N}\int d^4x \phi_n^\dagger(x)\beta(x)\gamma_5\phi_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty}(-2i)\sum_{n=1}^{\infty}\int d^4x \phi_n^\dagger(x)\beta(x)\gamma_5 f\left(\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right)\phi_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty}(-2i)\sum_{n=1}^{\infty}\int d^4x \phi_n^\dagger(x)\beta(x)\gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\phi_n(x)
\end{aligned} \tag{6.1.19}$$

で与えられ，正則化されたヤコビアン(すなわち量子異常)はマスター公式

$$\ln J = \lim_{M\to\infty}(-2i)\ \mathrm{Tr}\,\beta(x)\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2) \tag{6.1.20}$$

で与えられる．

この式から，まずパラメター $\alpha(x)$ で与えられる通常のベクトル場に対する量子異常は現在の計算法では 0 になり，$\beta(x)\gamma_5$ で与えられる軸性ベクトル場を含む理論のゲージ対称性は一般に量子異常により壊されていることがわかる．このトレースの具体的な計算は，平面波の完全系を用いて前章と全く同様の計算で求められ，結果は($\epsilon^{1234}=1$ として)

$$\begin{aligned}
\ln J &= \frac{1}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x(2i)\beta^a(x)T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}A_{\mu\nu}A_{\alpha\beta} \\
&\quad -\frac{32}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta + \frac{8i}{3}(V_{\mu\nu}A_\alpha A_\beta - A_\mu V_{\nu\alpha}A_\beta + A_\mu A_\nu V_{\alpha\beta})]
\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

のように，$A_\mu \to -iA_\mu$ ともとの実の場に直した表式で与えられる．ただし，実際の計算では，

$$A^{\mu a}(\partial_\mu \beta^a + f^{abc}V_\mu^b \beta^c) \tag{6.1.22}$$

に比例する項が切断のパラメター $M^2$ が掛かった形で現われるが，これはもとのラグランジアンに $A^{\mu a}A_{\mu a}$ に比例する軸性ベクトル場の質量項を付け加えておくと，ゲージ変換の下でこの余分な項を相殺できるので，ここでの異常項の表式からは省いてある．このように量子異常の計算では，適当な**局所的な**相殺項をラグランジアンに付け加えておくと消去できる項は，本当の意味での量子異常項とは見なさない．この**量子異常の定義**は，一般の量子異常項を考察するときには重要になる．

## 6.2 Pauli–Villars 正則化

ここで示した計算法は正則化という意味では，**Pauli–Villars の正則化**を用いた摂動計算に対応する．（ゲージ変換に量子異常が生じる場合には，ゲージ理論自身が意味をなさなくなり，非摂動的な計算というものは定義できない.）Pauli–Villars 正則化は経路積分では

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi \ \exp\left\{\int d^4x[\bar{\psi}(i\not{D})\psi + \bar{\phi}(i\not{D} - M)\phi]\right\} \tag{6.2.1}$$

で定義される．ただし，計算を行った後で，正則化のために導入された場の質量項 $M$ を無限大に大きくする極限を考える．ここで $\phi(x)$ は，Bose 的な（すなわち $\psi(x)$ のような Grassmann 数ではなく普通の数で表された非物理的な）スピノール場を表す．したがって，ゲージ変換

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = \exp\left[i\alpha(x) + i\beta(x)\gamma_5\right]\psi(x) \\ \phi(x) &\to \phi'(x) = \exp\left[i\alpha(x) + i\beta(x)\gamma_5\right]\phi(x) \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

の下では，場の変数 $\psi(x)$ と $\phi(x)$ に対して同じヤコビアンが分母と分子に現われ，正確に相殺される．（Grassmann 数では積分は微分で定義されるため，ヤコビアンは分母に現われることに注意されたい.）この性質のため，正則化された経路積分はヤコビアンとしての量子異常を出さない．しかし，Pauli–Villars

の正則場の作用積分

$$\int d^4x\bar{\phi}(x)(i\not{D} - M)\phi(x) \tag{6.2.3}$$

には質量項 $M$ が現われ，この質量項が大きくなる極限が物理的な理論を定義するが，現在のゲージ理論の例で言えば，軸性のゲージ変化 $\exp[i\beta^a(x)T^a\gamma_5]$ に対して，正則場の質量項 $M\bar{\phi}(x)\phi(x)$ はゲージ不変にはならず，ゲージ対称性を陽に壊すことになる．このゲージ対称性の破れは，$M \to \infty$ では，強い対称性の破れを引き起こす．これが Pauli–Villars 正則化という観点から見た量子異常の定義を与える．

Ward-高橋の恒等式という観点からは，上記のゲージ変換(6.1.7) で $\alpha = 0$ とした変数変換を経路積分で考えると，積分変数の名前の付け替えでは定積分の積分値は変化しない $\left(\int dxf(x) = \int dyf(y)\right)$ という性質の一般化は，恒等式

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi\ \exp\left\{\int d^4x[\bar{\psi}(i\not{D})\psi + \bar{\phi}(i\not{D} - M)\phi]\right\} \\
&\quad = \int \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\phi}'\mathcal{D}\phi' \exp\left\{\int d^4x[\bar{\psi}'(i\not{D})\psi' + \bar{\phi}'(i\not{D} - M)\phi']\right\} \\
&\quad = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi\ \exp\left\{\int d^4x[\bar{\psi}'(i\not{D})\psi' + \bar{\phi}'(i\not{D} - M)\phi']\right\}
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

を与える．この最後の変形では，積分の測度にヤコビアンが現われないという性質を用いた．この最後の式に現われる作用積分は具体的に書くと $\beta(x)$ が無限小の場合には

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\{\bar{\psi}\exp[i\beta(x)\gamma_5](i\not{D})\exp[i\beta(x)\gamma_5]\psi \\
&\quad +\bar{\phi}\exp[i\beta(x)\gamma_5](i\not{D} - M)\exp[i\beta(x)\gamma_5]\phi\} \\
&\qquad = \int d^4x[\bar{\psi}(i\not{D})\psi + \bar{\phi}(i\not{D} - M)\phi] \\
&\qquad\quad + \int d^4x\beta^a(x)D_\mu[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\psi(x) + \bar{\phi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\phi(x)] \\
&\qquad\quad - \int d^4x(2i)\beta^a(x)M\bar{\phi}(x)\gamma_5T^a\phi(x)
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

と書けることがわかる．この式を上記の恒等式に代入して，$\beta(x)$ が無限小であ

ることを考慮して一次の項のみを集めると，恒等式

$$D_\mu\langle[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\psi(x)+\bar{\phi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\phi(x)]\rangle=\langle 2iM\bar{\phi}(x)\gamma_5T^a\phi(x)\rangle \tag{6.2.6}$$

が得られる．ただし，共変微分は

$$\begin{aligned}D_\mu\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\psi(x)\rangle \;\equiv\; & (\partial_\mu\delta^{ac}+f^{abc}V_\mu^b)\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^c\psi(x)\rangle \\ & +f^{abc}A_\mu^b\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu T^c\psi(x)\rangle\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

で定義し，また一般の複合演算子 $O(x)$ に対して

$$\langle O(x)\rangle\equiv\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi O(x)\exp\left\{\int d^4x[\bar{\psi}(i\not{D})\psi+\bar{\phi}(i\not{D}-M)\phi]\right\} \tag{6.2.8}$$

を定義した．恒等式(6.2.6)で左辺は正則化された軸性カレントを与え，$M\to\infty$ とすると右辺の質量項が量子異常を与えて($\epsilon^{1234}=1$ として)

$$\begin{aligned}&D_\mu\langle[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\psi(x)]\rangle\\ &=\frac{2i}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta}+\frac{1}{3}A_{\mu\nu}A_{\alpha\beta}\\ &\quad -\frac{32}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta+\frac{8i}{3}(V_{\mu\nu}A_\alpha A_\beta-A_\mu V_{\nu\alpha}A_\beta+A_\mu A_\nu V_{\alpha\beta})]\end{aligned} \tag{6.2.9}$$

という前節で求めた量子異常を含む恒等式が求められる．

正則化は，摂動計算の途中の計算を不定性なく遂行するために導入したので，結果は他の計算方法で求めたものと一致するのは当然であるが，Pauli-Villars の正則化が何を行っているかをわかりやすく見るには，まず変数 $\psi(x)$ だけを変数変換して求めた恒等式

$$D_\mu\langle[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\psi(x)]\rangle=\ln J \tag{6.2.10}$$

と，変数 $\phi(x)$ だけを変数変換して求めた恒等式

$$D_\mu\langle[\bar{\phi}(x)\gamma^\mu\gamma_5T^a\phi(x)]\rangle=\langle 2iM\bar{\phi}(x)\gamma_5T^a\phi(x)\rangle-\ln J \tag{6.2.11}$$

を足したものを計算するのが Pauli-Villars の正則化であり，こうすることにより途中の軸性カレントに付随した摂動計算の不定性が除かれ，信頼できる計算ができるわけである．ただし，ここではヤコビアンから生じる量子異常項を模式的に $\ln J$ と書いた．このヤコビアンの符号が 2 つの式で異なっているのは，

Grassmann 数と普通の数では，ヤコビアンが分母と分子に現われることの反映である．

前節で議論した経路積分の計算法は演算子 $\not{D}$ の固有値で切断して正則化したが，この方法は一般にベクトル的なゲージ対称性を保つが，軸性のゲージ対称性を壊す．この性質は，Pauli–Villars 正則化に共通するものである．

## 6.3　カイラルゲージ理論と量子異常

この章のこれまでの節で議論した量子異常は $V-A$ 型とも呼ぶべきものであるが，ゲージ理論という意味では，そこでの共変微分を

$$\begin{aligned} D_\mu &= (\partial_\mu - iL_\mu(x))\frac{1-\gamma_5}{2} + (\partial_\mu - iR_\mu(x))\frac{1+\gamma_5}{2}, \\ L_\mu(x) &\equiv V_\mu(x) - A_\mu(x), \quad R_\mu(x) \equiv V_\mu(x) + A_\mu(x) \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

と書き換えて作用積分を

$$\begin{aligned} &\int d^4x\{\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\frac{1-\gamma_5}{2}\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - iR_\mu(x))\frac{1+\gamma_5}{2}\psi\} \\ &\equiv \int d^4x\{\bar{\psi}_L i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu - iR_\mu(x))\psi_R\} \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

のように左成分 $\psi_L(x) = (1-\gamma_5)/2\psi(x)$ と右成分 $\psi_R(x) = (1+\gamma_5)/2\psi(x)$ に分離するのが自然である．ここで

$$\frac{1\pm\gamma_5}{2} \times \frac{1\pm\gamma_5}{2} = \frac{1\pm\gamma_5}{2} \tag{6.3.3}$$

が成立し，$(1\pm\gamma_5)/2$ が射影演算子であるので，このように定義した左と右の成分はゲージ理論としては独立な成分として扱えることがわかる．

このとき，例えば，左成分だけの理論

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L \exp\left[\int d^4x\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)\right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L \exp\left[\int d^4x\bar{\psi}_L(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\psi_L(x)\right] \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

はカイラルなゲージ理論と呼ばれ，作用積分はゲージ変換

$$\psi_L(x) \to \psi'_L(x) = \exp[i\alpha^a T^a]\psi_L(x),$$
$$(\partial_\mu - iL_\mu(x)) \to (\partial_\mu - iL'_\mu(x)) = \exp[i\alpha^a T^a](\partial_\mu - iL_\mu(x))\exp[-i\alpha^a T^a] \tag{6.3.5}$$

の下で不変になる．しかし，経路積分の測度はこの変換の下では不変にはならない．このことを理解する1つの方法はカイラルなゲージ理論の経路積分(6.3.2)をゲージ場と相互作用しないダミーな $\psi_R$ を用いて

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_R \mathcal{D}\psi_R \times \exp\left[\int d^4x\{\bar{\psi}_L(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\psi_L(x) + \bar{\psi}_R(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R(x)\}\right] \tag{6.3.6}$$

のように書いて，この式はすでに議論した $V-A$ 型の理論で $V_\mu = -A_\mu = L_\mu/2$ と置いて得られることに着目する．したがって，量子異常も同じ置き換えで得られ，ゲージ場を固定して Fermi 粒子の場だけをゲージ変換して

$$D_\mu\langle\bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu T^a\psi_L(x)\rangle = \frac{-i}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu[L_\nu\partial_\alpha L_\beta - \frac{i}{2}L_\nu L_\alpha L_\beta] \tag{6.3.7}$$

という異常項を含む恒等式が得られる．ただし

$$D_\mu\langle\bar{\psi}_L\gamma^\mu T^a\psi_L\rangle = \partial_\mu\langle\bar{\psi}_L\gamma^\mu T^a\psi_L\rangle + f^{abc}L^b_\mu\langle\bar{\psi}_L\gamma^\mu T^c\psi_L\rangle \tag{6.3.8}$$

を定義した．

同様な考察から，右手成分 $\psi_R$ だけにゲージ場が結合する理論の場合は，$V-A$ 型の理論において $V_\mu = A_\mu = R_\mu/2$ と置き換えて

$$D_\mu\langle\bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu T^a\psi_R(x)\rangle = \frac{i}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu[R_\nu\partial_\alpha R_\beta - \frac{i}{2}R_\nu R_\alpha R_\beta] \tag{6.3.9}$$

が得られる．

### カイラルゲージ理論の量子論

上記で得られたカイラルなゲージ理論における量子異常の物理的な意味を理

解するために，ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}(\partial_\mu L^a_\nu - \partial_\nu L^a_\mu - f^{abc}L^b_\mu L^c_\nu)^2 + \bar{\psi}_L(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\psi_L(x) \tag{6.3.10}$$

で定義されたカイラルゲージ理論の量子論を考察する．ゲージ条件としてはすべてのゲージ場の時間成分を 0 とする(Weyl ゲージとも呼ばれる)

$$L^a_0(x) = 0 \tag{6.3.11}$$

条件を採用する．このとき $L^a_0(x)$ に関する運動方程式

$$\frac{\delta}{\delta L^a_0(x)}\int d^4x\mathcal{L} = G^a(x) = 0 \tag{6.3.12}$$

から Gauss の法則に関係した制約

$$G^a(x) = \frac{1}{g^2}D^k F^a_{0k} + \bar{\psi}_L(x)\gamma^0 T^a\psi_L(x) \simeq 0 \tag{6.3.13}$$

が得られる．ただし，Maxwell 理論の電場の一般化を

$$F^a_{0k} \equiv \partial_0 L^a_k - \partial_k L^a_0 - f^{abc}L^b_0 L^c_k = \partial_0 L^a_k \tag{6.3.14}$$

で定義した．$k$ は $1,2,3$ の空間成分を表す．

Gauss の演算子 $G^a(x)$ の物理的な意味は，$L^a_0(x) = 0$ とした作用積分はまだ時間に依存しないゲージ対称性

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &\to \exp\,[i\omega^a(\vec{x})T^a]\psi_L(x) \\ L^a_k(x) &\to L^a_k(x) + D_k\omega^a(\vec{x}) \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

を持っており，そのようなゲージ対称性の生成演算子(Noether カレント)になっている．このことは，時間に依存しないゲージ変換の式で無限小のゲージパラメター $\omega^a$ に時間依存性を持たせて $\omega^a(t,\vec{x})$ としたものを，作用積分で行うと

$$\int d^4x\mathcal{L} \to \int d^4x\mathcal{L} + \int d^4x\partial_0\omega^a(t,\vec{x})G^a(x) \tag{6.3.16}$$

となることから理解される．

上記の時間依存性を与えたゲージ変換 $\omega^a(t,\vec{x})$ を経路積分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L\mathcal{D}L^a_k \exp\left[i\int \mathcal{L}d^4x\right] \tag{6.3.17}$$

に適用すると，ヤコビアンからの量子異常(6.3.7)を考慮すると

$$\partial_0\langle G^a(x)\rangle = \langle\frac{-1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu[L_\nu\partial_\alpha L_\beta - \frac{i}{2}L_\nu L_\alpha L_\beta]\rangle \qquad (6.3.18)$$

が得られる．ただし，Minkowski 計量で $\epsilon^{1230}=1$ を用いた．この式はラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から作られたハミルトニアン $H$ を用いると(演算子形式での記法では)

$$\begin{aligned}\partial_0\hat{G}^a(x) &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{G}^a(x)]\\ &= \frac{-1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu[\hat{L}_\nu\partial_\alpha\hat{L}_\beta - \frac{i}{2}\hat{L}_\nu\hat{L}_\alpha\hat{L}_\beta] \neq 0 \qquad (6.3.19)\end{aligned}$$

を意味する．すなわち，Gauss の演算子 $\hat{G}^a(x)$ とハミルトニアン $\hat{H}$ が量子異常の効果で交換しなくなり，$\hat{H}$ はゲージ不変でなくなる．

このことは，場の量子論の Schrödinger 汎関数表示と呼ばれる定式化で書いた 2 つの基本的な方程式

$$\begin{gathered}i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t;L_k^a(\vec{x}),\psi_L(\vec{x})) = \hat{H}\Psi(t;L_k^a(\vec{x}),\psi_L(\vec{x})),\\ \hat{G}^a(\vec{x})\Psi(t;L_k^a(\vec{x}),\psi_L(\vec{x})) = 0\end{gathered} \qquad (6.3.20)$$

が，$[\hat{H},\hat{G}^a(\vec{x})]\neq 0$ なので，両立しなくなる．すなわち，時間 $t=0$ で $\hat{G}^a\Psi=0$ を満たすように選んでも，時間 $t\neq 0$ での時間発展した状態に対しては，$\hat{G}^a\Psi=0$ が成立しなくなる．この Gauss の制約と呼ばれる波動汎関数 $\Psi$ に対する条件は，$\hat{G}^a$ はすでに説明したように時間に依存しないゲージ変換を生成し，汎関数 $\Psi(t;L_k^a(\vec{x}),\psi_L(\vec{x}))$ に現われるゲージ場 $L_k^a(\vec{x})$ の非物理的な縦波成分を取り除いていることを思い起こすと，ゲージ対称性が量子異常で壊されている場合には，通常のゲージ理論の量子論を構成できなくなることを示している．

Lorentz 共変性を損なわない一般のゲージ条件での定式化では，BRST 電荷 $Q_{\mathrm{BRST}}$ と呼ばれる量を用いた(Fock 空間表示での)状態ベクトルに対する制約

$$\begin{gathered}i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle,\\ Q_{\mathrm{BRST}}|\Psi\rangle = 0\end{gathered} \qquad (6.3.21)$$

が基本的になるが，量子異常を含む理論では

$$\frac{d}{dt}Q_{\mathrm{BRST}} = \int d^3xc^a(x)\frac{-1}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu[L_\nu\partial_\alpha L_\beta - \frac{i}{2}L_\nu L_\alpha L_\beta] \neq 0 \tag{6.3.22}$$

のように $Q_{\mathrm{BRST}}$ は保存量ではなくなり，通常の定式化ができなくなる．ただし，$c^a(x)$ は Faddeev-Popov のゴースト場と呼ばれるものである．

このように，カイラルなゲージ理論が量子論として意味を持つためには，**量子異常の相殺**を，その理論に含まれている Fermi 粒子の場の間で起こす必要がある．すなわち，Weinberg-Salam 理論のようにパリティを破るカイラルなゲージ理論では，許される Fermi 粒子の数とか種類に非常に強い制約が課せられることになる．実際の Weinberg-Salam 理論では，量子異常の相殺が起こっていることを後に説明する．

## 6.4　共変的な量子異常

カイラルなゲージ理論に現われる量子異常の計算方法としては，すでに説明した Pauli-Villars 正則化に関係した計算方法以外に，量子異常がゲージ不変な形を持つ計算法が知られており，このようにして計算された量子異常は共変的な量子異常と呼ばれている．この計算を，カイラルなゲージ理論

$$\int \mathcal{D}\psi_L\mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\left\{\int[\bar{\psi}_L(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_L(x)]d^4x\right\} \tag{6.4.1}$$

に基づいて説明したい．まず Euclid 化した理論では，この経路積分に現われる Dirac の演算子 $\not{D}_L = \gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)$ は，エルミート的にはならない

$$\not{D}_L^\dagger = \gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) = \not{D}_R \tag{6.4.2}$$

すなわち左手系が右手系に変わるわけである．この場合も

$$\not{D}_L^\dagger\not{D}_L = (\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x)))^2\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \tag{6.4.3}$$

は正定値でエルミート的になることが確かめられる．したがって正規直交系

$$\not{D}_L^\dagger \not{D}_L \phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x), \quad \int d^4x \phi_n(x)^\dagger \phi_m(x) = \delta_{nm} \tag{6.4.4}$$

が定義される．ここで，$\not{D}_L$ の 0 固有値と $\not{D}_L^\dagger \not{D}_L$ の 0 固有値の間に 1 対 1 対応があることが次のように確かめられる．

$$\begin{aligned} &\not{D}_L \phi_n(x) = 0 \ \rightarrow \ \not{D}_L^\dagger \not{D}_L \phi_n(x) = 0, \\ &\not{D}_L^\dagger \not{D}_L \phi_n(x) = 0 \ \rightarrow \ (\not{D}_L \phi_n, \not{D}_L \phi_n) = 0 \ \rightarrow \ \not{D}_L \phi_n(x) = 0 \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

が成立するからである．同様に，エルミートな演算子 $\not{D}_L \not{D}_L^\dagger$ を用いて完全形

$$\not{D}_L \not{D}_L^\dagger \varphi_n(x) = \lambda_n^2 \varphi_n(x), \quad \int d^4x \varphi_n(x)^\dagger \varphi_m(x) = \delta_{nm} \tag{6.4.6}$$

を定義でき，$\not{D}_L^\dagger$ の 0 固有値と $\not{D}_L \not{D}_L^\dagger$ の 0 固有値の間に 1 対 1 の対応がある．さらに，

$$\not{D}_L^\dagger \not{D}_L \phi_n(x) = \lambda_n^2 \phi_n(x) \ \rightarrow \ \not{D}_L \not{D}_L^\dagger (\not{D}_L \phi_n(x)) = \lambda_n^2 (\not{D}_L \phi_n(x)) \tag{6.4.7}$$

からわかるように，$\lambda_n \neq 0$ であれば $\lambda_n > 0$ に選んで，

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \not{D}_L \phi_n(x) \tag{6.4.8}$$

により正しく規格化された固有関数が定義できる．このことはまた $\not{D}_L^\dagger \not{D}_L$ と $\not{D}_L \not{D}_L^\dagger$ が 0 でない固有値をすべて同じ数だけ共有していることを示している．

このようにして定義した関数系 $\{\phi_n(x)\}$ と $\{\varphi_n(x)\}$ を用いて，カイラルゲージ理論の Fermi 粒子の変数を

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= \sum_n a_n \phi_n(x), \\ \bar{\psi}_L(x) &= \sum_n \bar{b}_n \varphi_n^\dagger(x) \end{aligned} \tag{6.4.9}$$

のように展開すると，Fermi 粒子の作用は

$$\begin{aligned} \int [\bar{\psi}_L(x) i\gamma^\mu (\partial_\mu - iL_\mu(x)) \psi_L(x)] d^4x &= \sum_{n,m} \bar{b}_n a_m \int \varphi_n^\dagger(x) \not{D}_L \phi_m(x) d^4x \\ &= \sum_{n,m} \bar{b}_n a_m \int \varphi_n^\dagger(x) \lambda_m \varphi_m(x) d^4x \\ &= \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n \bar{b}_n a_n \end{aligned} \tag{6.4.10}$$

のように形式的に対角化される．

ここで，**Fermi 粒子数**を表す位相変換を $\alpha(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x),\\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(x)\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

で定義すると，積分の測度は

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'_L\mathcal{D}\psi'_L = \exp\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_n^N i\int d^4x\alpha[\varphi_n^\dagger(x)\varphi_n(x) - \phi_n^\dagger(x)\phi_n(x)]\right\}\mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L \tag{6.4.12}$$

のように変換される．ここに現われるヤコビアンは前章における計算と同様にモードに関する切断を固有値に関する切断に置き換えて

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\sum_n^\infty i\int d^4x\alpha(x)\left[\varphi_n^\dagger(x)f\left(\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right)\varphi_n(x) - \phi_n^\dagger(x)f\left(\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right)\phi_n(x)\right]\\
&= \lim_{M\to\infty}\sum_n^\infty i\int d^4x\alpha(x)\\
&\quad\times\left[\varphi_n^\dagger(x)f\left(\frac{\not{D}_L\not{D}_L^\dagger}{M^2}\right)\varphi_n(x) - \phi_n^\dagger(x)f\left(\frac{\not{D}_L^\dagger\not{D}_L}{M^2}\right)\phi_n(x)\right]\\
&= \lim_{M\to\infty} i\int d^4x\,\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\alpha(x)e^{-ikx}\\
&\quad\times\left[f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\frac{1+\gamma_5}{2}\right) - f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]e^{ikx}\\
&= \lim_{M\to\infty} i\int d^4x\,\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\alpha(x)e^{-ikx}\\
&\quad\times\left[f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\left[\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) - \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]\right]e^{ikx}\\
&= \lim_{M\to\infty} i\int d^4x\,\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\alpha(x)e^{-ikx}\left[f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\gamma_5\right]e^{ikx}
\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

のように変形される．ここで $(1\pm\gamma_5)/2$ が射影演算子であることから

$$f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\frac{1+\gamma_5}{2}\right) - f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\frac{1-\gamma_5}{2}\right) = f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\left[\frac{1+\gamma_5}{2} - \frac{1-\gamma_5}{2}\right] \tag{6.4.14}$$

と書けることを用いた．

ヤコビアンの具体的な計算はこれまでと全く同様であり，結果として

$$\ln J(\alpha) = i\int d^4x \,\mathrm{tr}\, \alpha^a(x)T^a \frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{6.4.15}$$

のように計算され，(6.4.11)に対する Noether カレントと組み合わせると

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)\rangle = -i\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{6.4.16}$$

が得られ，Fermi 粒子数は量子異常を含むことがわかる．

この量子異常の意味を理解するために，経路積分の測度を具体的に

$$\mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L = \lim_{N\to\infty} Jd\bar{b}_1\cdots d\bar{b}_{n_0}da_1\cdots da_{m_0}\prod_n^N d\bar{b}_n da_n \tag{6.4.17}$$

と書く[*1]．この式では，$\not{D}_L\not{D}_L^\dagger$ および $\not{D}_L^\dagger\not{D}_L$ が，それぞれ $n_0$ 個と $m_0$ 個の 0 固有値を持つ一般の場合を考えた．この事実は一般に

$$\begin{aligned}&\dim\ker\not{D}_L\not{D}_L^\dagger - \dim\ker\not{D}_L^\dagger\not{D}_L\\&= \dim\ker\not{D}_L^\dagger - \dim\ker\not{D}_L = n_0 - m_0 = \mathrm{index}\end{aligned} \tag{6.4.18}$$

のように書かれる．ここで例えば $\dim\ker\not{D}_L$ は演算子 $\not{D}_L$ の 0 固有値関数(kernel)の個数(dimension)を表し，上記の 0 固有値の数の差は**指数**(index)という重要な概念を与える．

ここで現われた指数は，第 3 章での光の位相演算子のときに議論したように，光の生成演算子を $a^\dagger = \not{D}_L$ と同定すると，調和振動子に付随した指数定理(3.5.1)と形式的に同じ形を持っていることがわかる．

この指数の意味を議論すると，まず $\gamma_5\not{D}+\not{D}\gamma_5 = 0$ に注意すると，一般に

$$\not{D}\psi_n(x) = 0 \;\to\; \not{D}\gamma_5\psi_n(x) = 0 \;\to\; \not{D}\left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}\right)\psi_n(x) = 0 \tag{6.4.19}$$

が結論され，演算子 $\not{D}$ の 0 固有値関数は同時に $\gamma_5$ の固有関数 $[(1\pm\gamma_5)/2]\psi_n(x)$ に選ぶことができる．さらに

---

*1 $\phi_n(x) = \langle x|\phi_n\rangle$，$\varphi^\dagger(x) = \langle\varphi_n|x\rangle$ と書くと，位相因子 $\det\langle x|\phi_n\rangle\det\langle\varphi_n|x\rangle = J^{-1}$ の逆数がヤコビアンとして現われる．この位相は，$\lambda_n$ はゲージ不変なので，ゲージ変換そのものに量子異常が現われるときには(ゲージ場のゲージ変換という観点からゲージ量子異常を理解するには)本質的になる．

$$\not{D}\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x), \quad \not{D}\gamma_5\psi_n(x) = -\lambda_n\gamma_5\psi_n(x)$$
$$\to \int d^4x \psi_n^\dagger(x)\gamma_5\psi_n(x) = 0, \ \lambda_n \neq 0 \tag{6.4.20}$$

が成立するので，上記の指数(6.4.18)は $\not{D}\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x)$ を満たす関数系を用いると

$$\sum_n \int d^4x \psi_n^\dagger(x)\gamma_5\psi_n(x) = \sum_{\lambda_n=0} \int d^4x \psi_n^\dagger(x)\gamma_5\psi_n(x) = n_+ - n_- \tag{6.4.21}$$

とも書かれる．ただし，$n_0 = n_+$，$m_0 = n_-$ とおいた．前章の量子異常の議論のときに示したように，この指数はゲージ場が運ぶ Pontryagin 指数と呼ばれるものに一致し（結合定数 $g$ をゲージ場に含める記法で）

$$n_+ - n_- = \lim_{M\to\infty} \sum_n \int d^4x \psi_n^\dagger(x)\gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\psi_n(x)$$
$$= \int \frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta} \tag{6.4.22}$$

と書くことができ，Atiyah-Singer の指数定理として知られている．

さて，上記のカイラルなゲージ理論の経路積分に戻って，Fermi 粒子数を表す位相変換で $\alpha$ を定数とすると，積分の測度は

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'_L\mathcal{D}\psi'_L$$
$$= \exp\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_n^N i\alpha \int d^4x[\varphi_n^\dagger(x)\varphi_n(x) - \phi_n^\dagger(x)\phi_n(x)]\right\}\mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L$$
$$= \exp\left[i\alpha(n_+ - n_-)\right]\mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L \tag{6.4.23}$$

のように変換され 0 固有値の差が現われる．カイラルなゲージ理論では，もしゲージ場が 0 でない Pontryagin 数を運ぶときには，Fermi 粒子数は量子異常で破れ保存されないことがわかる．すなわち，Weinberg-Salam 理論のようにクォークとレプトンが同じ Yang-Mills 場（W-ボソンと呼ばれる場）に結合しているときには，一般にクォーク数 $B/3$ とレプトン数 $L$ は共に量子異常で破れ，その差 $B-L$ のみが保存することが示される．

Green 関数の計算でいうと，

$$\langle\bar{\psi}_L(x_1)\cdots\bar{\psi}_L(x_{n_0})\psi_L(y_1)\cdots\psi_L(y_{m_0})\rangle$$
$$=\int\mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L\bar{\psi}_L(x_1)\cdots\bar{\psi}_L(x_{n_0})\psi_L(y_1)\cdots\psi_L(y_{m_0})$$
$$\times\exp\left\{\int[\bar{\psi}_L(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu-iL_\mu(x))\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_L(x)]d^4x\right\}\neq 0 \tag{6.4.24}$$

が成立し，真空に $n_0$ 個の $\bar{\psi}_L$ と $m_0$ 個の $\psi_L$ 場が吸収されていることがわかる．Grassmann 数の積分は微分で定義され，また指数の肩の作用(6.4.10)には 0 固有値の自由度が現われないことを考慮すると経路積分を 0 でないようにするには，上記の個数の $\bar{\psi}_L$ と $\psi_L$ を挿入することが最低必要である．これ以上の $\bar{\psi}_L$ とか $\psi_L$ を挿入すると通常の Green 関数の一般化が得られる．

### ゲージ変換に関する共変的な量子異常

つぎに，Fermi 場の**ゲージ変換**を考えると

$$\begin{aligned}\psi_L(x)\to\psi'_L(x)&=e^{i\alpha^a(x)T^a}\psi_L(x)\\ \bar{\psi}_L(x)\to\bar{\psi}'_L&=\bar{\psi}_L(x)e^{-i\alpha^a(x)T^a}\end{aligned} \tag{6.4.25}$$

に対して，(6.4.9)を用いた経路積分の測度は $\alpha(x)=\alpha^a(x)T^a$ として

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'_L\mathcal{D}\psi'_L = \exp\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_n^N i\int d^4x[\varphi_n^\dagger(x)\alpha(x)\varphi_n(x)-\phi_n^\dagger(x)\alpha(x)\phi_n(x)]\right\} \times\mathcal{D}\bar{\psi}_L\mathcal{D}\psi_L \tag{6.4.26}$$

のように変換され，ここに現われるヤコビアンは(6.4.13)の計算と全く同様に計算されて

$$\ln J(\alpha^aT^a)=i\int d^4x\,\mathrm{tr}\,\alpha^a(x)T^a\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{6.4.27}$$

を与える．このようにして計算されたゲージ変換に関する量子異常はその形から**共変的な量子異常**(covarinat anomaly)と呼ばれている．

この共変的な量子異常を出す正則化されたカレントは完全系

$$\not{D}\psi_n(x)=\lambda_n\psi_n(x),\qquad\int d^4x\psi_n^\dagger\psi_m(x)=\delta_{n,m} \tag{6.4.28}$$

を用いて第 4 章で議論した共変正則化したカレント

$$
\begin{aligned}
J^{a\mu}(x) &\equiv \lim_{y\to x} \mathrm{tr}\left[T^a\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)f(\not{D}^2/M^2)\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right] \\
&= \sum_n \psi_n^\dagger(x)T^a\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)f(\not{D}^2/M^2)\frac{1}{i\not{D}}\psi_n(x) \\
&= \sum_n \psi_n(x)^\dagger\left[T^a\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)f(\lambda_n^2/M^2)\frac{1}{i\lambda_n}\right]\psi_n(x) \qquad (6.4.29)
\end{aligned}
$$

により与えられる．ただし，$\lambda_n = 0$ が現われる場合には，例えば，次節で議論する Higgs 場を導入して量子異常を変えないように赤外発散を除く必要がある．後でわかるように量子異常自身は赤外発散をしない．ゲージ変換の下で $\omega(x) = \omega^a(x)T^a$ として

$$
\psi_n(x) \to \exp[i\omega(x)]\psi_n(x), \quad \not{D} \to \exp[i\omega(x)]\,\not{D}\,\exp[-i\omega(x)] \qquad (6.4.30)
$$

と変換され，(6.4.28)の固有値 $\lambda_n$ はゲージ不変であることを用いると

$$
J^{a\mu}(x) \to J^{a\mu}(x) + f^{abc}J^{b\mu}(x)\omega^c(x) \qquad (6.4.31)
$$

のように無限小の $\omega$ で共変的に変換される．また量子異常は $\epsilon^{1234} = 1$ として

$$
\begin{aligned}
D_\mu J^{a\mu}(x) &\equiv \partial_\mu J^{a\mu}(x) + f^{abc}L_\mu^b J^{c\mu}(x) \\
&= \sum_n \left[\psi_n(x)^\dagger T^a\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)f(\lambda_n^2/M^2)\frac{1}{i\lambda_n}(\not{D}\psi_n(x))\right. \\
&\qquad \left. -(\not{D}\psi_n(x))^\dagger T^a\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)f(\lambda_n^2/M^2)\frac{1}{i\lambda_n}\psi_n(x)\right] \\
&= \sum_n (-i)\psi_n(x)^\dagger T^a\left[\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)-\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]f(\lambda_n^2/M^2)\psi_n(x) \\
&= -i\sum_n \psi_n(x)^\dagger T^a\gamma_5 f(\lambda_n^2/M^2)\psi_n(x) \\
&= -i\sum_n \psi_n(x)^\dagger T^a\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)\psi_n(x) \\
&= -i\,\mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}T^a\gamma_5 f(\not{D}^2/M^2)e^{ikx} \\
&= -\frac{i}{32\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \quad \text{for} \quad M\to\infty \qquad (6.4.32)
\end{aligned}
$$

のように計算され(6.4.27)と一致する．この計算からわかるように，共変的量子異常の計算方法はカレントの共変正則化として理解される．

この結果から，ゲージ変換が量子的に破れていることがわかる．逆に，もしこのようにして計算される量子異常がすべて相殺されていれば，カイラルなゲー

ジ理論は量子的にも矛盾しないことが結論される．すなわち，異常項は $F^b_{\mu\nu}T^b$ と $F^b_{\alpha\beta}T^c$ の置き換えに関して対称であることを考慮すると

$$\mathrm{tr}\, T^a(T^bT^c + T^cT^b) = \mathrm{tr}\, T^a\{T^b, T^c\} = 0 \qquad (6.4.33)$$

が成立しておれば，上記のようにすべてがゲージ不変に定式化されると想定して計算してきたことが，正当化されるからである*2．例えば，ゲージ群を直交群 $SO(n)$ で $n \neq 6$ に選べば，ゲージ変換に関する量子異常が現われないことが知られている．具体的には，群 $SO(3)$ あるいは局所的にはそれと同等な群 $SU(2)$ の場合には，Pauli 行列の性質から上記の量子異常の相殺条件が満たされることが確かめられる．応用上重要な Weinberg-Salam 理論に量子異常が現われないことを理解するには，直交群 $SO(10)$ を用いた統一理論にすべてのクォークとレプトンが過不足なくまとめられることを用いるのが簡単な方法である．

一般に，同じゲージ場が左手系にはゲージ群の表現 $T^a_L$ で結合し，右手系には表現 $T^a_R$ で結合している場合には，上記の計算を右手系に関しても実行することにより，**量子異常の相殺条件**は

$$\mathrm{tr}\, T^a_L\{T^b_L, T^c_L\} - \mathrm{tr}\, T^a_R\{T^b_R, T^c_R\} = 0 \qquad (6.4.34)$$

で与えられる．例えば，右手系と左手系の両方に同じ表現で結合しているベクトル的な結合(vector-like theory)では，量子異常は自動的に相殺され(あるいは，最初から現われないので)，矛盾のない理論を与える．量子電磁力学とか量子色力学はこのような理論に対応している．

## 6.5 Weinberg–Salam 理論における量子異常の相殺

ゲージ群 $SU(2)_L \times U(1)$ に基づく Weinberg–Salam 理論の場合を少し詳しく議論したい．この群の生成演算子を$(T_1, T_2, T_3)$ および $Y$ で表すと，Fermi 粒子の電荷に対して Gell-Mann–西島型の関係

*2 ときおり，共変的な量子異常では量子異常の相殺が議論できないような記述が見受けられるが，これまでの議論からわかるように，共変的な量子異常が相殺されればカイラルなゲージ理論は矛盾しない理論であることは明白である．共変的な量子異常の立場では，量子異常が現われると，ゲージ対称性が損なわれるのみならず，すべてがうまく行くとして定式化した経路積分もうまく定式化されないという意味で矛盾である．また群 $SU(2)$ の場合には Witten の大局的量子異常を考慮する必要がある．

$$Q = T_3 + Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + Y \tag{6.5.1}$$

が成立する．まずクォークの 2 重項を

$$\psi_L = (1-\gamma_5)/2\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \psi_R = (1+\gamma_5)/2\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{6.5.2}$$

と書くとき，クォークのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_q = \psi_L i\gamma^\mu(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig' B_\mu Y_L^q)\psi_L + \psi_R i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig' B_\mu Y_R^q)\psi_R \tag{6.5.3}$$

のように書かれる．ここで $T^a = (1/2)\tau^a$ は Pauli 行列を用いて与えられ，$U(1)$ の生成演算子はクォーク$(u, d)$の電荷が$(2/3, -1/3)$であることに注意すると，

$$Y_L^q = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad Y_R^q = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \tag{6.5.4}$$

で与えられる．

したがって，クォーク場のゲージ変換に伴う量子異常は，前節で与えた公式 (6.4.32) を用いると，$W_\mu = W_\mu^a T^a$ という記法で群 $SU(2)$ に伴う

$$\frac{3}{32\pi^2}\operatorname{tr} T^a \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[gF(W)_{\mu\nu} + g'F(B)_{\mu\nu}Y_L^q][gF(W)_{\alpha\beta} + g'F(B)_{\alpha\beta}Y_L^q] \tag{6.5.5}$$

および群 $U(1)$ に伴う

$$\frac{3}{32\pi^2}\operatorname{tr} Y_L^q \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[gF(W)_{\mu\nu} + g'F(B)_{\mu\nu}Y_L^q][gF(W)_{\alpha\beta} + g'F(B)_{\alpha\beta}Y_L^q]$$
$$-\frac{3}{32\pi^2}\operatorname{tr} Y_R^q \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[g'F(B)_{\mu\nu}Y_R^q][g'F(B)_{\alpha\beta}Y_R^q] \tag{6.5.6}$$

で与えられる．ただし，すべての表式で 3 倍しているのは，クォークが運ぶ色(color)の自由度のため，クォーク場が 3 組現われることによる．

同様に，レプトンの 2 重項

$$\psi_L = (1-\gamma_5)/2 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}, \quad \psi_R = (1+\gamma_5)/2 \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \tag{6.5.7}$$

を考えると(ニュートリノの右手成分はゲージ場には結合しないが便宜上付け加えて)，レプトン$(\nu, e)$の電荷は$(0,-1)$であることを考慮して，$U(1)$ 電荷は

$$Y_L^l = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad Y_R^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.5.8}$$

のように決められる．したがって，レプトンからの量子異常への寄与は，群 $SU(2)$ に伴う

$$\frac{1}{32\pi^2} \operatorname{tr} T^a \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [gF(W)_{\mu\nu} + g'F(B)_{\mu\nu} Y_L^l][gF(W)_{\alpha\beta} + g'F(B)_{\alpha\beta} Y_L^l] \tag{6.5.9}$$

および群 $U(1)$ に伴う

$$\frac{1}{32\pi^2} \operatorname{tr} Y_L^l \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [gF(W)_{\mu\nu} + g'F(B)_{\mu\nu} Y_L^l][gF(W)_{\alpha\beta} + g'F(B)_{\alpha\beta} Y_L^l] - \frac{1}{32\pi^2} \operatorname{tr} Y_R^l \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} [g'F(B)_{\mu\nu} Y_R^l][g'F(B)_{\alpha\beta} Y_R^l] \tag{6.5.10}$$

で与えられる．

まず，群 $SU(2)$ の量子異常は群 $SU(2)$ そのものには量子異常が現われないことと，$\operatorname{tr} T^a = 0$ および $\operatorname{tr} Y_L^q + \operatorname{tr} Y_L^l = 0$ を考慮するとすべて相殺することがわかる．残る群 $U(1)$ に関する量子異常は

$$3 \operatorname{tr} (Y_L^q)^3 - 3 \operatorname{tr} (Y_R^q)^3 + \operatorname{tr} (Y_L^l)^3 - \operatorname{tr} (Y_R^l)^3 = \frac{1}{36} - \frac{7}{9} - \frac{1}{4} + 1 = 0 \tag{6.5.11}$$

を考慮するとすべて相殺されることがわかる．このように Weinberg-Salam 理論はクォークとレプトンを同時に考えると量子的にも矛盾のない理論になっている．

### Higgs 粒子の効果

共変的な量子異常の応用として，Higgs 粒子は量子異常に寄与しないことを説明したい．ここでは，次の形をしたラグランジアンを用いて議論する．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}(x)\Big[& i\not{D}_L\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)+i\not{D}_R\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)-\phi(x)\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\\ &-\phi^\dagger(x)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\Big]\psi(x)\end{aligned} \tag{6.5.12}$$

$\phi(x)$ は Higgs 粒子(あるいは一般にはスカラー粒子)を表す．右手系と左手系が Higgs 粒子を通じて結合していることに注意して，次の一般的な演算子を用いる

$$\mathcal{D} \equiv \not{D}_L\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)+\not{D}_R\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)+i\phi(x)\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)+i\phi^\dagger(x)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right). \tag{6.5.13}$$

Euclid 化した議論で考えて，共変的な量子異常の計算では，場 $\psi$ は演算子 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ の完全系で展開し，場 $\bar{\psi}$ は演算子 $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger$ の完全系で展開することを思い起こす．したがって，例えば，左手系のゲージ変換

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi' = \exp\left[i\alpha^a(x)T^a\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]\psi(x)\\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}' = \bar{\psi}(x)\exp\left[-i\alpha^a(x)T^a\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.5.14}$$

に対する量子異常の計算はマスター公式

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Tr}\, i\alpha^a(x)T^a\exp\left[-\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}/M^2\right]\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\\ &+\mathrm{Tr}\, i\alpha^a(x)T^a\exp\left[-\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger/M^2\right]\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\end{aligned} \tag{6.5.15}$$

で与えられる．ここで，次の関係式に注目する．

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} \;=\;& \not{D}_L^2\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)+\not{D}_R^2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)+\phi^\dagger\phi\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)+\phi\phi^\dagger\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\\ &+\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)(\not{D}_L i\phi^\dagger-i\phi^\dagger\not{D}_R)+(\not{D}_R i\phi-i\phi\not{D}_L)\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right),\\ \mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger \;=\;& \not{D}_L^2\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)+\not{D}_R^2\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)+\phi^\dagger\phi\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)+\phi\phi^\dagger\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\\ &-\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)(\not{D}_L i\phi^\dagger-i\phi^\dagger\not{D}_R)-(\not{D}_R i\phi-i\phi\not{D}_L)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right).\end{aligned} \tag{6.5.16}$$

まず Higgs 場に関して 1 次の項は，例えば，

$$\not{D}_L i\phi^\dagger - i\phi^\dagger \not{D}_R = \gamma^\mu(\partial_\mu i\phi^\dagger) + \not{L}\phi^\dagger - \phi^\dagger \not{R} \tag{6.5.17}$$

からわかるように，微分演算子は Higgs 場に作用して閉じており他の右に続く演算子に作用しない．したがって，マスター公式で平面波を使った式，

$$\begin{aligned}&-\mathrm{tr}\int d^4x i\alpha^a(x)T^a\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-kx}\exp[-\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}/M^2]e^{ikx}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\\&+\mathrm{tr}\int d^4x i\alpha^a(x)T^a\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-kx}\exp[-\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger/M^2]e^{ikx}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\end{aligned} \tag{6.5.18}$$

において，$e^{ikx}$ を $\not{D}_L^2$ などに含まれる微分演算子を通過させ，その後に $k_\mu \to Mk_\mu$ とスケール変換し，他の項はすべて $1/M$ 展開するときに，Higgs 場を含む項は常に $1/M^2$ を含んだ形で展開される．また Higgs 場に関して 1 次の項は，右手系を左手系，あるいは左手系を右手系に変換させるので，必ず偶数次の項のみがマスター公式に寄与する．このために量子異常に現われる $\psi$ と $\bar{\psi}$ の 2 つの寄与において全く同じ形の項を出し，結果として $\gamma_5$ と一緒にトレースを取る形を与える．例えば，4 次元では

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5(\not{D}_L i\phi^\dagger - i\phi^\dagger\not{D}_R)(\not{D}_R i\phi - i\phi\not{D}_L)/M^4 = 0 \tag{6.5.19}$$

となり，$\gamma$ 行列を 2 個しか含まないので量子異常に寄与しない．

Higgs 場に関して奇数次の項を除いた式は，マスター公式 (6.5.15) で

$$\mathrm{Tr}\, i\alpha^a(x)T^a\gamma_5\ \exp\{-[\not{D}_L^2 + \phi^\dagger\phi]/M^2\} \tag{6.5.20}$$

を与え，前章と同じ計算をすることにより，Dirac の $\gamma$ 行列を含まない Higgs 場の部分は量子異常に寄与しないことが確かめられる．

## 6.6 一般化された Pauli–Villars 正則化

カイラルゲージ理論にも適用できるように一般化された Pauli–Villars 正則化を議論したい．この正則化は 1 個のカイラル Fermi 粒子を正則化するのに無限個の補助的な場を導入するというあまり経済的でない手法であるが，原理的な意味で重要である．この正則化はすでに第 4 節で議論した共変的な正則化の特殊な場合としても理解でき，実際以下ではこの見方からの定式化を与える．

コンパクトな群，例えば $SU(n)$，に属するゲージ場 $A^a_\mu$ が結合した Fermi 粒子の理論

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - iA^a_\mu T^a)\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi = \bar{\psi} i \not{D}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi \tag{6.6.1}$$

を考える．質量項は $m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L$ のように左手系 $\psi_L = (1-\gamma_5)/2\psi$ と右手系 $\psi_R$ を結びつけており，質量が大きな粒子を用いる通常の Pauli-Villars の正則化は左手系だけのゲージ変換を破ることになり，カイラルな理論の正則化には適さない．そこで，無限個の成分を含む Fermi 粒子 $\Psi(x)$ と Bose 粒子 $\Phi(x)$ を考える．すなわち正則化された理論を

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \overline{\Psi}_L i\not{D}\Psi_L + \overline{\Psi}_R i\not{D}\Psi_R - \overline{\Psi}_L M\Psi_R - \overline{\Psi}_R M^\dagger \Psi_L \\ &\quad + \overline{\Phi} i\not{D}\Phi - \overline{\Phi}M'\Phi\end{aligned} \tag{6.6.2}$$

で定義する．ここで

$$\Psi_L = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\begin{pmatrix}\psi\\ \psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\end{pmatrix},\quad \Psi_R = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \vdots\end{pmatrix},\quad \Phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{6.6.3}$$

である．$\psi, \psi_1, \psi_2, \cdots$，は通常の 4 成分の Dirac 場であり，$\phi_1, \phi_2, \cdots$，は 4 成分の Dirac 場であるが Bose 的な(非物理的な)場である．ただし，陽に書いてはいないが，それぞれの場はゲージ自由度の表現に対応する内部自由度を含んでいるとする．無限次元の質量行列は

$$\begin{aligned}M &= \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 6 & \cdots\\ \cdots & & & & \end{pmatrix}\Lambda \\ M' &= \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 3 & & O\\ & & 5 & \\ & O & & \ddots\end{pmatrix}\Lambda = (M')^\dagger\end{aligned} \tag{6.6.4}$$

で与えられる．このとき $M^\dagger M$ と $MM^\dagger$ は共に対角的になり，その対角成分だけ書くと $M^\dagger M = (0,\ 2^2\Lambda^2,\ 4^2\Lambda^2, \cdots)$ および $MM^\dagger = (2^2\Lambda^2,\ 4^2\Lambda^2,\ 6^2\Lambda^2, \cdots)$ である*3．$\Lambda$ は質量の次元を持つパラメターであり最終的には $\Lambda \to \infty$ とする．

上記の正則化されたラグランジアンを成分別に書き下すと

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} i \not{D} \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) \psi \\ &\quad + \bar{\psi}_1 (i\not{D} - 2\Lambda)\psi_1 + \bar{\psi}_2 (i\not{D} - 4\Lambda)\psi_2 + \cdots \\ &\quad + \bar{\phi}_1 (i\not{D} - \Lambda)\phi_1 + \bar{\phi}_2 (i\not{D} - 3\Lambda)\phi_2 + \cdots \end{aligned} \tag{6.6.5}$$

となり，物理的な場 $\psi$ を正則化するために，質量 $2\Lambda,\ 4\Lambda, \cdots,$ の $\gamma_5$ を含まない重い Dirac 粒子 $\psi_1, \psi_2, \cdots,$ と質量 $\Lambda,\ 3\Lambda, \cdots,$ の Bose 的な Dirac 場が導入されたことになる．

正則化された理論は次のゲージ変換の下で不変である

$$\begin{aligned}&\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\left[i\omega^a(x) T^a\right]\Psi(x) = \exp\left[i\omega(x)\right]\Psi(x) \\ &\Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp\left[i\omega(x)\right]\Phi(x) \\ &\not{D} \to \not{D}' = \exp\left[i\omega(x)\right] \not{D} \exp\left[-i\omega(x)\right]\end{aligned} \tag{6.6.6}$$

このゲージ変換に対する Noether カレントは，$\omega(x)$ を無限小に選んで $\not{D}$ は固定した変換を考えて（$\Psi(x) = \Psi_L(x) + \Psi_R(x)$ として）

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \overline{\Psi}' i\not{D}\Psi' - \overline{\Psi}'_L M \Psi'_R - \overline{\Psi}'_R M^\dagger \Psi'_L + \overline{\Phi}' i\not{D}\Phi' - \overline{\Phi}' M' \Phi' \\ &= \mathcal{L} - (D_\mu \omega)^a J^{a\mu}(x)\end{aligned} \tag{6.6.7}$$

から

$$J^{a\mu}(x) = \bar{\Psi}(x) T^a \gamma^\mu \Psi(x) + \bar{\Phi}(x) T^a \gamma^\mu \Phi(x) \tag{6.6.8}$$

で与えられる．同様に，次の $U(1)$ 位相変換

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\Psi(x), \quad \Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{i\alpha(x)}\Phi(x) \tag{6.6.9}$$

から，Fermi 粒子数のカレント

$$J^\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) + \bar{\Phi}(x)\gamma^\mu\Phi(x) \tag{6.6.10}$$

が得られ，軸性の $U(1)$ 位相変換

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{i\alpha(x)\gamma_5}\Psi(x), \quad \Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{i\alpha(x)\gamma_5}\Phi(x) \tag{6.6.11}$$

---

*3 指数 $\dim \ker M^\dagger M - \dim \ker MM^\dagger = 1$ が質量 0 のカイラル Fermi 粒子の数と一致する．

から，軸性の $U(1)$ カレント

$$J_5^\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\Psi(x) + \bar{\Phi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\Phi(x) \tag{6.6.12}$$

が得られる．

これらのカレントが現在の正則化でどのように定義されているかを見るために，正則化されたラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}i\mathcal{D}\Psi + \bar{\Phi}i\mathcal{D}'\Phi \tag{6.6.13}$$

のように書く．ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \not{D} + iM\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) + iM^\dagger\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \\ \mathcal{D}' &\equiv \not{D} + iM' \end{aligned} \tag{6.6.14}$$

を定義した．このとき，例えば，ゲージカレント(6.6.8)は

$$\begin{aligned} J^{\mu a}(x) &= \lim_{y\to x}\{\langle T^*\overline{\psi}(y)T^a\gamma^\mu\psi(x)\rangle + \langle T^*\overline{\phi}(y)T^a\gamma^\mu\phi(x)\rangle\} \\ &= \lim_{y\to x}\{-\langle T^*T^a\gamma^\mu\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle + \langle T^*T^a\gamma^\mu\phi(x)\overline{\phi}(y)\rangle\} \\ &= \lim_{y\to x}\mathrm{Tr}\left[T^a\gamma^\mu\left(\frac{1}{i\mathcal{D}} - \frac{1}{i\mathcal{D}'}\right)\delta(x-y)\right] \end{aligned} \tag{6.6.15}$$

のように書かれる．ただし，第 4 章の議論の一般化として，トレースは Dirac と Yang-Mills の足および無限個の成分にわたるものとする．また $\psi(x)$ は反交換し $\phi(x)$ は交換することを用いた．

つぎに Euclid 計量では $\not{D}^\dagger = \not{D}$ であることを考慮して

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{D}} &= \frac{1}{\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}}\mathcal{D}^\dagger \\ &= \frac{1}{\not{D}^2 + \frac{1}{2}M^\dagger M(1-\gamma_5) + \frac{1}{2}MM^\dagger(1+\gamma_5)}\mathcal{D}^\dagger \\ &= \left[\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\frac{1}{\not{D}^2 + M^\dagger M} + \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\frac{1}{\not{D}^2 + MM^\dagger}\right] \\ &\qquad \times\left[\not{D} - iM^\dagger\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) - iM\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\right] \\ \frac{1}{\mathcal{D}'} &= \frac{1}{(\mathcal{D}')^\dagger\mathcal{D}'}(\mathcal{D}')^\dagger \\ &= \frac{1}{\not{D}^2 + (M')^2}(\not{D} - iM') \end{aligned} \tag{6.6.16}$$

のように書くことができる．このときゲージカレントの表式の中で

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[-iT^a\gamma^\mu\left(\frac{1}{\mathcal{D}}-\frac{1}{\mathcal{D}'}\right)\delta(x-y)\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left\{-iT^a\gamma^\mu\left[\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\not{D}^2+(2n\Lambda)^2}\right.\right. \\
&\qquad +\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\not{D}^2+(2n\Lambda)^2} \\
&\qquad \left.\left.-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\not{D}^2+[(2n+1)\Lambda]^2}\right]\not{D}\delta(x-y)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[-iT^a\gamma^\mu\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\not{D}^2}{\not{D}^2+(n\Lambda)^2}\frac{1}{\not{D}}\delta(x-y)\right] \\
&\qquad +\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[iT^a\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{\not{D}}\delta(x-y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[T^a\gamma^\mu f(\not{D}^2/\Lambda^2)\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right] \\
&\qquad -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[T^a\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]
\end{aligned}
\tag{6.6.17}
$$

のように，奇数個の $\gamma$ 行列のトレースが 0 になることを考慮して無限個の成分に関する和を計算した後に書くことができる．この式に現われる正則化の関数 $f(x^2)$ は

$$
\begin{aligned}
f(x^2) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{x^2+(n\Lambda)^2} \\
&= \frac{\pi x/\Lambda}{\sinh(\pi x/\Lambda)}
\end{aligned}
\tag{6.6.18}
$$

により定義される．この関数 $f(x^2)$ は $x^2=\infty$ で急速に 0 に近づき，また正則化の関数の基本的な性質

$$
f(0)=1 \tag{6.6.19}
$$

を満たす．

このようにして，一般化された Pauli–Villars の正則化の本質は次のようなカレントの正則化としてまとめられる．

$$
\begin{aligned}
&\langle\overline{\psi}(x)T^a\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi(x)\rangle_{PV}\\
&\quad=\lim_{y\to x}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[T^a\gamma^\mu f(\not{D}^2/\Lambda^2)\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[T^a\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]\right\}\\
&\langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi(x)\rangle_{PV}\\
&\quad=\lim_{y\to x}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu f(\not{D}^2/\Lambda^2)\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma_5\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]\right\}\\
&\langle\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi(x)\rangle_{PV}\\
&\quad=\lim_{y\to x}\left\{\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma_5 f(\not{D}^2/\Lambda^2)\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{6.6.20}
$$

これらの式で，左辺の表式は正則化されていないもとの場の変数で書いたカレントを表し，右辺はそのカレントが正則化でいかに変形されるかを示している．とくに，(6.6.20)の 2 つの $U(1)$ カレントは $\gamma_5^2=1$ を用いると，もとの変数では同じ形をしているが正則化の後には異なる形をしている．

第 4 章で説明したようにループが 1 つのすべての Feynman 図はこれらのカレント(6.6.20)から計算され，したがって，これらのカレントは一般化された Pauli-Villars 正則化のすべての情報を含んでいることになる．これらの式から次のようなこの正則化の特徴が読み取れる．まず第一にゲージカレントの式からわかるように $\gamma_5$ を含む量子異常を出しうるカレントの成分は正則化されていない．したがって，現在の正則化は量子異常を含まない，例えば，ゲージ群 $SO(n)$, $n\neq 6$ に適用される．同様な理由で，パリティを破る理論での Fermi 粒子数に現われる量子異常は，通常の $U(1)$ カレントではなく最後の軸性の $U(1)$ カレントを用いて計算されることになる．いずれにしても現在の正則化はカレントの成分の半分だけを正則化しており，すべての Feynman 図を有限にすると

いう観点からは不十分なものである．

この正則化と比較すると，(6.4.29)で議論したカレントの共変的な正則化(covariant regularization)はすべての成分を有限にしている．しかし，一般化された Pauli-Villars の正則化はラグランジアンのレベルで定義されるという共変的な正則化にない特徴を持っている．

## 6.7 Wess-Zumino の積分可能性条件と Wess-Zumino 項

この節では，$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a$ として次の経路積分を考察する．

$$Z(A_\mu) = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{\int \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu[\partial_\mu - iA_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}]\psi(x)d^4x\right\} \qquad (6.7.1)$$

(6.4.29)で定義した共変的なカレント

$$J^{a\mu}(x) = \lim_{y\to x}\left\{\mathrm{Tr}\left[T^a\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)f(\not{D}^2/M^2)\frac{1}{i\not{D}}\delta(x-y)\right]\right. \qquad (6.7.2)$$

はすでに説明したように

$$D_\mu J^{a\mu}(x) = -i\,\mathrm{tr}\,T^a\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{A}_{\mathrm{cov}}^a \qquad (6.7.3)$$

の形の共変的な量子異常を含む．

量子異常の応用においては，有限な変換に対する量子異常が重要になる例が多い．すなわち無限小の変換に対するヤコビアンを重ね合わせて有限な変換に対するヤコビアンを求める必要がある．このとき，Fermi 粒子に対する変換とヤコビアンを，$\alpha(x) = \alpha^a(x)T^a$ などを無限小量として，次のように対応させる

$$e^{i\alpha(x)}e^{i\beta(x)}\psi_R \to \ln J(i\alpha, i\beta). \qquad (6.7.4)$$

このとき群の結合条件 $e^{i\alpha(x)}e^{i\beta(x)}e^{-i\alpha(x)}e^{-i\beta(x)} = \exp\{-[\alpha,\beta]\}$ はヤコビアンに対して

$$\ln J(i\alpha, i\beta) - \ln J(i\beta, i\alpha) = \ln J(-[\alpha,\beta]) \qquad (6.7.5)$$

という積分可能性条件(Wess-Zumino 条件)を課すことになる．この条件は，まずパラメター $\alpha$ で変換したゲージ場を用いてパラメター $\beta$ でヤコビアンを計算したときと，その逆の順序で計算したときの差として与えられる．ところが上

記の共変的な量子異常(6.7.3)では $F_{\mu\nu}$ がゲージ共変なので

$$-\mathrm{tr}\, i\beta \left[\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}, i\alpha\right] = \mathrm{tr}\,[\alpha,\beta]\frac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \qquad (6.7.6)$$

の 2 倍が(6.7.5)の左辺に現れ，2 倍だけ大きくなりすぎて上の積分可能性条件を満たさない．他方この章の第 2 および 3 節で議論した Pauli–Villars の正則化と関連した量子異常は，計算は少し複雑になるが Wess-Zumino の条件を満たしていることが確かめられる．Wess-Zumino の条件が重要になるのは，量子異常が現われてゲージ理論としては矛盾している場合であるので，ループが 1 つの Feynman 図の摂動計算だけが意味を持つ．この場合には Wess-Zumino 条件は基本的には Feynman 図の各頂点に対する Bose 対称性の条件になることが示される．共変的な量子異常は 1 つの頂点に量子異常を集める計算になっておりこの条件を満たさない．

任意の次元での(一般に重力を含む)量子異常の計算では，共変的な量子異常だけが実際に計算可能である．したがって，共変的な量子異常を積分可能な量子異常に変換する処方が重要になる．この処方としてはいろいろ知られているが，ここではカレントを用いて経路積分を定義する処方の概要を説明したい．

経路積分においてゲージ場を $A_\mu \to sA_\mu$ と置き換えて，パラメター $s$ を導入して(6.7.1)の $Z(A\mu)$ を用いて $W(A_\mu) = \ln Z(A_\mu)$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial s}W(sA_\mu) \;=\; \int d^4x A^a_\mu(x)\langle\bar{\psi}(x)T^a\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\psi(x)\rangle \qquad (6.7.7)$$

が形式的に成立する．したがって正則化された連結した Green 関数の生成汎関数 $W(A_\mu)$ を共変的なカレント $J^{a\mu}(x)$(6.7.2)を用いて

$$W(A_\mu) \equiv \int_0^1 ds \int d^4x A^a_\mu(x) J^{a\mu}(x; sA_\mu) \qquad (6.7.8)$$

で**定義**する[*4]．カレント $J^{a\mu}(x)$ は有限な量なので $W(A_\mu)$ も有限な量である．

有限な $W(A_\mu)$ を $A_\mu(x)$ の汎関数とみなして，$A_\mu$ のべきに展開すると，当然ながらこの展開は $A_\mu$ に関する Bose 対称性を満たす．したがって

---

*4　定義式(6.7.8)の虚数部分は興味ある情報($\eta$ 不変量)を含んでいることが知られている．

$$j^{a\nu}(x) \equiv \frac{\delta}{\delta A^a_\nu(x)} W(A_\mu) \tag{6.7.9}$$

で定義された $j^{a\nu}(x)$ は Wess-Zumino 条件を満たすことになる．定義式から

$$W(A_\mu) = \int_0^1 ds \frac{\partial}{\partial s} W(sA_\mu) = \int_0^1 ds \int d^4x A_{a\mu}(x) j^{a\mu}(x, sA_\nu) \tag{6.7.10}$$

が成立し，$W$ は定義するために用いたカレントの種類に依存しないことがわかる．具体的には $j^{a\nu}(x)$ は，$J^{a\mu}(x,s) = J^{a\mu}(x, sA_\nu)$ と略記して

$$\begin{aligned} j^{a\mu}(x) &= \int_0^1 ds J^{a\mu}(x,s) + \int_0^1 ds \int d^4y A^b_\nu(y) \frac{\delta J^{b\nu}(y,s)}{\delta A^a_\mu(x)} \\ &= J^{a\mu}(x) - \int_0^1 dss \frac{\partial}{\partial s} J^{a\mu}(x,s) + \int_0^1 ds \int d^4y A^b_\nu(y) \frac{\delta J^{b\nu}(y,s)}{\delta A^a_\mu(x)} \end{aligned} \tag{6.7.11}$$

であるが $J^{a\mu}(x,s)$ が $s$ に $sA_\nu(y)$ という組み合わせだけに依存することを用いると

$$\frac{\partial}{\partial s} J^{a\mu}(x,s) = \int d^4y A^b_\nu(y) \frac{\delta}{\delta(sA^b_\nu(y))} J^{a\mu}(x,s) \tag{6.7.12}$$

が成立し

$$j^{a\mu}(x) = J^{a\mu}(x) + \int_0^1 ds \int d^4y A_{b\nu}(y) \left\{ \frac{\delta J^{b\nu}(y,s)}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta J^{a\mu}(x,s)}{\delta A^b_\nu(y)} \right\} \tag{6.7.13}$$

が得られる．最後の項は，カレント $J^{a\mu}(x)$ が積分可能性条件を満たしていないという性質の表現である（$J^{a\mu}(x) = \delta W/\delta A^a_\mu(x)$ の形に書けていれば 0 になる）と同時に，量子異常のない理論では 2 つのカレントは一致するはずなので量子異常に直接依存している．

以下で，この最後の項を求める基本的な道筋を説明したい．まず $s=1$ の場合を考えると，座標 $y$ に関する共変微分は

$$D^{bc}_\nu(y) \left\{ \frac{\delta J^{c\nu}(y)}{\delta A^a_\mu(x)} - \frac{\delta J^{a\mu}(x)}{\delta A^c_\nu(y)} \right\} = \frac{\delta \mathcal{A}^b_{\rm cov}(y)}{\delta A^a_\mu(x)} \tag{6.7.14}$$

を与える．ただし $\mathcal{A}^b_{\rm cov}$ は(6.7.3)の共変的な量子異常であり，

$$D_\nu^{bc}(y) \equiv \delta^{bc}\partial_\nu + f^{bdc}A_\nu^d(y) \tag{6.7.15}$$

である．この式は $D_\nu^{bc}(y)$ と $\delta/\delta A_\mu^a(x)$ の交換関係

$$D_\nu^{bc}(y)\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} = \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)}D_\nu^{bc}(y) - f^{bac}\delta^\mu{}_\nu\delta(x-y) \tag{6.7.16}$$

から導かれる

$$D_\nu^{bc}(y)\frac{\delta J^{c\nu}(y)}{\delta A_\mu^a(x)} = \frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{cov}}^b(y)}{\delta A_\mu^a(x)} - f^{bac}\delta^\mu{}_\nu\delta(x-y)J^{c\nu}(y) \tag{6.7.17}$$

および

$$-D_\nu^{bc}(y)\frac{\delta J^{a\mu}(x)}{\delta A_\nu^c(y)} = f^{bac}\delta^\mu{}_\nu\delta(x-y)J^{c\nu}(y) \tag{6.7.18}$$

を考慮すると得られる．この(6.7.18)は，カレント $J^{a\mu}(x)$ がゲージ変換に関して共変であるという関係式(6.4.31)

$$J^{a\mu}(x, A_\nu^c(x) + D_\nu^{cb}\omega^b(x)) = J^{a\mu}(x, A_\nu^c(x)) + f^{acb}J^{c\mu}(x)\omega^b(x) \tag{6.7.19}$$

の両辺を関数 $\omega^b(y)$ に関して関数微分することにより得られる．

次に共変的な量子異常の関数微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathrm{cov}}^b(y)}{\delta A_\mu^a(x)} &= -\frac{\delta i \,\mathrm{Str}\, T^b \dfrac{1}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(y)}{\delta A_\mu^a(x)} \\
&= -i \,\mathrm{Str}\, T^b \frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}[D_\nu, \delta A_\mu]F_{\alpha\beta}(y)/\delta A_\mu^a(x) \\
&= -i \,\mathrm{Str}\, T^b \frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}[D_\nu, \delta A_\mu F_{\alpha\beta}(y)]/\delta A_\mu^a(x) \\
&= -(\delta^{bc}\partial_\nu^{(y)} + f^{bec}A_\nu^e(y))[i \,\mathrm{Str}\, \frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}T^cT^a\delta(y-x)F_{\alpha\beta}(y)] \\
&= (\delta^{bc}\partial_\nu^{(y)} + f^{bec}A_\nu^e(y))2\frac{\delta \mathcal{A}^c(y)}{\delta F_{\mu\nu}^a(x)}
\end{aligned} \tag{6.7.20}$$

の形に書けることに注意する．ここで Str はゲージ群の生成演算子に関して対称化したもののトレースをとることを示し，また 3 行目の変形では Bianchi の恒等式

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[D_\nu(y), F_{\alpha\beta}(y)] = 0 \tag{6.7.21}$$

を用いた．

このようにして，(6.7.14)と(6.7.20)から

$$D_\nu^{bc}(y)\left\{\frac{\delta J^{c\nu}(y)}{\delta A_\mu^a(x)}-\frac{\delta J^{a\mu}(x)}{\delta A_\nu^c(y)}+2\frac{\delta\mathcal{A}^c(y)}{\delta F_{\mu\nu}^a(x)}\right\}=0 \tag{6.7.22}$$

が得られる．この関数方程式の解として

$$\frac{\delta J^{b\nu}(y)}{\delta A_\mu^a(x)}-\frac{\delta J^{a\mu}(x)}{\delta A_\nu^b(y)}=-2\frac{\delta\mathcal{A}^b(y)}{\delta F_{\mu\nu}^a(x)} \tag{6.7.23}$$

が存在するのは明らかであるが，この式が一般解を表すことは次のような考察から直感的に理解できる．まず左辺は局所ゲージ変換において，点 $y$ ではゲージの足 $b$ に関してベクトル的に変換され，点 $x$ では $a$ に関してベクトル的に変換されることが示される．さらに，左辺が量子異常に比例することはすでに説明したが，このことは $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ に比例することを意味している．したがって右辺はゲージ場の強さ $F_{\mu\nu}$ のみに依存し，共変的な量子異常を $F_{\mu\nu}$ で関数微分したものに比例していることがわかる．さらに次元の考察(質量次元 2)を加味すると上の解は一般解であることが理解できる．同じ結論は，左辺の式のより具体的な考察から得られることが知られている．

このようにして得られた $\delta J^{b\nu}(y)/\delta A_\mu^a(x)-\delta J^{a\mu}(x)/\delta A_\nu^b(y)$ を，(6.7.13)に代入すると(添え字 $s$ は $sA_\mu^a$ を用いることを示すとして)

$$j^{a\mu}(x)=J^{a\mu}(x)+\frac{4i}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int_0^1 dss\,\mathrm{Str}\,\{T^aA_\nu F_{\alpha\beta}^s\} \tag{6.7.24}$$

が得られる．したがって，量子異常はこの式の共変微分をとって

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\rm cons}^a &= \mathcal{A}_{\rm cov}^a+\frac{4i}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int_0^1 dss\,\mathrm{Str}\,\{T^a\partial_\mu(A_\nu F_{\alpha\beta}^s)+i[A_\mu,T^a]A_\nu F_{\alpha\beta}^s\}\\ &= \int_0^1 ds\mathcal{A}_{\rm cov}^{as}+4i\frac{i}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\int_0^1 dss(s-1)\,\mathrm{Str}\,\{[T^a,A_\mu]A_\nu F_{\alpha\beta}^s\}\\ &= -\frac{i}{24\pi^2}\,\mathrm{tr}\,T^a\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu[A_\nu\partial_\alpha A_\beta-\frac{i}{2}A_\nu A_\alpha A_\beta]\end{aligned} \tag{6.7.25}$$

でつながっており，共変的な量子異常(6.7.3)から出発して積分可能な量子異常(consistent anomaly)(6.3.7)を導く処方を与えている．ただし，この式の変形においては Bianchi の恒等式および $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu,[A_\alpha,A_\beta]]=0$ を用い，対称化されたトレース Str に注意する．

特に Abel 的なゲージ理論では

$$\mathcal{A}^a_{\text{cons}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}^a_{\text{cov}} \tag{6.7.26}$$

を与え，3 角形の Feynman 図の Bose 対称化因子 1/3 で結びついている．

これらの公式は任意の偶数 $d = 2n$ 次元に一般化でき，（第 5 章の $U(1)$ 型の量子異常(5.3.33)と全く同様に計算される）共変的な量子異常を

$$\mathcal{A}^a_{\text{cov}} = -i\frac{1}{(4\pi)^n n!}\,\mathrm{tr}\,T^a \epsilon^{\mu_1\nu_1\ldots\mu_n\nu_n}F_{\mu_1\nu_1}\cdots F_{\mu_n\nu_n} \tag{6.7.27}$$

と書くとき

$$j^{a\mu}(x) = J^{a\mu}(x) + \frac{2ni}{(4\pi)^n n!}\epsilon^{\mu\nu\mu_2\nu_2\ldots\mu_n\nu_n}\int_0^1 dss\,\mathrm{Str}\,\{T^a A_\nu F^s_{\mu_2\nu_2}\cdots F^s_{\mu_n\nu_n}\} \tag{6.7.28}$$

および

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^a_{\text{cons}} &= \int_0^1 ds\mathcal{A}^{as}_{\text{cov}} \\ &\quad -\frac{2n}{(4\pi)^n n!}\epsilon^{\mu\nu\mu_2\nu_2\ldots\mu_n\nu_n}\int_0^1 dss(s-1)\,\mathrm{Str}\,\{[T^a, A_\mu]A_\nu F^s_{\mu_2\nu_2}\cdots F^s_{\mu_n\nu_n}\}\end{aligned} \tag{6.7.29}$$

で与えられる．

上の導出からわかるように，$\mathcal{A}^a_{\text{cov}} = 0$ なら自動的に $\mathcal{A}^a_{\text{cons}} = 0$ となる．

**Wess–Zumino 項**

群，例えば，$SU(n)$ に属する背景場 $L^a_\mu(x)T^a = L_\mu$ と $R^a_\mu(x)T^a = R_\mu$ を含む理論を考え，次の恒等式で Wess–Zumino 項 $\varGamma_{\text{WZ}}$ を定義する．

$$\begin{aligned}&\int d\mu \exp\left\{i\int d^4x[\bar\psi_L iU^\dagger(\partial_\mu - iL_\mu)U\psi_L + \bar\psi_R i(\partial_\mu - iR_\mu)\psi_R\right\} \\ &\quad \equiv e^{-i\varGamma_{WZ}(U,L_\mu,R_\mu)}\int d\mu \exp\left\{i\int d^4x[\bar\psi_L i(\partial_\mu - iL_\mu)\psi_L\right. \\ &\qquad \left. + \bar\psi_R i(\partial_\mu - iR_\mu)\psi_R\right\}\end{aligned} \tag{6.7.30}$$

ここで $U(x)$ は群 $SU(n)$ の要素であり，具体的には

$$U(x) = \exp\left[2i\pi^a(x)T^a/f_\pi\right] = \exp\left[2i\pi(x)/f_\pi\right] \qquad (6.7.31)$$

で与えられる．$\Gamma_{\mathrm{WZ}}$ の定義式の左辺の経路積分で積分変数を

$$\psi_L(x) \to U^\dagger \psi_L(x) \qquad (6.7.32)$$

のように変数変換すると，もしヤコビアンを無視すると，$U(x)$ 依存性はすべて取り除かれる．したがって $\Gamma_{\mathrm{WZ}}$ は量子異常の効果のみを含むことがわかる．また，6.1 節の計算法を用いて左辺で量子異常を含まないベクトル的な変換 $\psi \to U^\dagger\psi$ をすると経路積分は

$$\int d\mu \exp\left\{i\int d^4x[\bar\psi_L i(\partial_\mu - iL_\mu)\psi_L + \bar\psi_R iU(\partial_\mu - iR_\mu)U^\dagger\psi_R]\right\} \qquad (6.7.33)$$

とも書かれる．

さて，$\Gamma_{\mathrm{WZ}}$ を具体的に計算するために，実数のパラメター $s$ を導入して，ある程度変数変換をしてゲージ場が

$$L_\mu(x,s) \equiv i\exp\left[-2i\pi(x)/f_\pi(1-s)\right](\partial_\mu - iL_\mu)\exp\left[2i\pi(x)/f_\pi(1-s)\right] \qquad (6.7.34)$$

の形になったときにさらに無限小のカイラル変換

$$\psi(x) \to \exp\left[i\pi(x)/f_\pi\gamma_5 ds\right]\psi(x) \qquad (6.7.35)$$

と量子異常を含まないベクトル的な変換

$$\psi(x) \to \exp\left[-i\pi(x)/f_\pi ds\right]\psi(x) \qquad (6.7.36)$$

を交互に行う．カイラルな変換に現われる量子異常を $s$ に関して積分して

$$-i\Gamma_{\mathrm{WZ}}(U, L_\mu, R_\mu) = \mathrm{tr}\int d^4x\int_0^1 ds\pi(x)/f_\pi\mathcal{A}(L_\mu(x,s), R_\mu(x)) \qquad (6.7.37)$$

が導かれる．ただし，$\mathcal{A}(L_\mu(x), R_\mu(x))$ はこの章の第 1 節で議論した積分可能な量子異常(6.1.21)である[*5]

$$\mathcal{A}(L_\mu(x), R_\mu(x)) = \frac{i}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}A_{\mu\nu}A_{\alpha\beta} - \frac{32}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta$$

---

*5 (6.7.37)は Minkowski 計量で書いた式であり，$\epsilon^{1230}=1$ なので，量子異常の $i$ を除く必要があるが $d^4x$ から $i$ が現われ，結局(6.7.38)をそのまま用いると正しい答えが得られる．

$$+\frac{8i}{3}(V_{\mu\nu}A_\alpha A_\beta - A_\mu V_{\nu\alpha}A_\beta + A_\mu A_\nu V_{\alpha\beta})] \tag{6.7.38}$$

が，この式で

$$V_\mu = \frac{1}{2}[L_\mu + R_\mu], \quad A_\mu = \frac{1}{2}[-L_\mu + R_\mu] \tag{6.7.39}$$

の置き換えをするものとする．

この $\Gamma_{\rm WZ}$ (6.3.37)を，群を $SU(3)$ に選びカイラル対称性の自発的な破れに伴う Nambu-Goldstone 粒子 $\pi^a(x)$ を記述する非線形 $\sigma$ 模型に付け加えると，(外場との結合を含む)量子異常の効果がすべて取り入れられることになる．ただし，QCD のカラーの自由度 $N_c = 3$ を $\Gamma_{\rm WZ}$ に掛ける必要がある．

$\Gamma_{\rm WZ}$ の応用を 2 つ述べる．まず $\pi^0 \to \gamma\gamma$ という中性の $\pi$ 中間子の光への崩壊は，$A_\mu = 0$ として $\pi(x)$ に関して 1 次の項のみを残し

$$\pi(x) = \pi^0(x)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad V_\mu = e\begin{pmatrix} 2/3v_\mu & 0 \\ 0 & -1/3v_\mu \end{pmatrix} \tag{6.7.40}$$

とおいて，$N_c = 3$ を掛けて得られる

$$\Gamma_{\rm WZ} = -\frac{e^2}{32\pi^2}\int d^4x \frac{\pi^0(x)}{f_\pi}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{6.7.41}$$

という有効相互作用で記述されることになる．

同じ結果をより基本的な考察から導くには，2 個のクォーク$(u, d)$を考えそれらの電荷は$(2e/3, -e/3)$であることを考慮してラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{u}i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\frac{2e}{3}v_\mu)u + \bar{d}i\gamma^\mu(\partial_\mu + i\frac{e}{3}v_\mu)d \tag{6.7.42}$$

を定義する．このときアイソスピンの第 3 成分に対応する軸性カレント

$$j^{3\mu}(x) = \frac{1}{2}[\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 d] \tag{6.7.43}$$

は(陽に書いてないカラーの自由度 $N_c = 3$ を考慮して)次の量子異常を Minkowski 計量で含む．

$$\partial_\mu j^{3\mu}(x) \;=\; N_c\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\frac{e^2}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}. \tag{6.7.44}$$

カイラル対称性の自発的な破れがあるときの Nambu-Goldstone の定理は

$$\int d^4x e^{-ipx}\langle\gamma(k_1)\gamma(k_2)|\partial_\mu j^{3\mu}(x)|0\rangle = f_\pi\langle\gamma(k_1)\gamma(k_2)|\pi^0(p)\rangle \tag{6.7.45}$$

を意味するが，量子異常(6.7.44)を考慮すると($p^2 \sim 0$ で)

$$\langle\gamma(k_1)\gamma(k_2)|\pi^0(p)\rangle = \frac{1}{f_\pi}\int d^4x e^{-ipx}\langle\gamma(k_1)\gamma(k_2)|\frac{e^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}(x)|0\rangle \tag{6.7.46}$$

が得られ，Wess-Zumino 項(6.7.41)が与える有効相互作用と一致する．この分析は 1969 年に Bell-Jackiw および Adler により与えられ，結果は実験値ともよく合致することが知られている．

第 2 の応用として，最初に導入したゲージ場が 0 の場合($L_\mu(x) = R_\mu(x) = 0$)を考えると

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rm WZ}(U) &= iN_c\,{\rm tr}\int d^4x\int_0^1 ds\frac{\pi(x)}{12\pi^2 f_\pi}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \\ &\quad\times\partial_\mu[L_\nu(x,s)\partial_\alpha L_\beta(x,s) - \frac{i}{2}L_\nu(x,s)L_\alpha(x,s)L_\beta(x,s)]\end{aligned} \tag{6.7.47}$$

ただし $U(x,s) = \exp[2i\pi(x)/f_\pi(1-s)]$ として

$$L_\nu(x,s) = iU^\dagger(x,s)\partial_\nu U(x,s) \tag{6.7.48}$$

である．ここで $U(x,s)U^\dagger(x,s) = 1$ から出る $\partial_\mu U^\dagger = -U^\dagger(\partial_\mu U)U^\dagger$ を用いて，さらに $s$ を第 5 番目の座標と見なして 5 次元の完全反対称テンソルを $\epsilon^{12305} = 1$ で定義すると

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rm WZ}(U) &= \frac{N_c}{240\pi^2}\,{\rm tr}\int_B d^5x\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta\rho} \\ &\quad\times U^\dagger(\partial_\mu U)U^\dagger(\partial_\nu U)U^\dagger(\partial_\alpha U)U^\dagger(\partial_\beta U)U^\dagger(\partial_\rho U)\end{aligned} \tag{6.7.49}$$

のように対称な形に書くことができる．積分領域 $B$ (ball を意味する)は $0 \leqq s \leqq 1$ を表す．この $\Gamma_{\rm WZ}(U)$ を $\pi(x)$ に関して展開すると量子異常に基づく Nambu-Goldstone 粒子の間の有効相互作用が求められる．

## 6.8　対称性の量子的破れと異常交換関係

一般に量子異常が現れる理論では，演算子形式では異常な交換関係が現れる．これは，正準量子化では演算子の代数関係とその表現で理論が定義されているからであり，もしすべての代数関係が正常であれば量子異常の入る余地はなくなる．このような量子異常に付随した異常交換関係はこの章の第3節の(6.3.19)でも現れたが，第10章でKac-Moody代数とVirasoro代数に関係してさらに詳しく説明する．この節では，量子異常が存在しないときにも現れる後藤-今村-Schwinger項と呼ばれる現象と量子異常との違いを簡単に説明したい．

量子電磁気学では，電流 $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ の相関関数は真空の分極に関係した計算から

$$\int d^4x e^{iq(x-y)}\langle T^* j^\mu(x) j^\nu(y)\rangle$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2)\left\{\int_0^1 d\alpha 2\alpha(1-\alpha)\ln\left[\frac{-\alpha(1-\alpha)q^2+\Lambda^2}{-\alpha(1-\alpha)q^2+m^2}\right]\right\} \tag{6.8.1}$$

の形を持つことを第4章の(4.2.24)で説明した．ただし，正準交換関係を議論するときには，暗に運動量空間で切断をした理論を想定しているので，正則化の質量 $\Lambda$ が陽に現れるくり込まれていない裸の相関関数を書いた．

この式にBJL(Bjorken–Johnson–Low)の処方と呼ばれる次のルールを適用する：Fourier変換の右辺が $q_0 \to \infty$ で0に近づくならば，Lorentz共変な $T^*$ 積を正準理論の $T$ 積に置き換えてよい．もし0に近づかない場合は，その0でない量を両辺から差し引いて $T$ 積を定義する．この理由は，同時刻交換関係が定義されているとする正準理論では，一般にカレントの相関関数も同様に同時刻(これは，上のFourier変換では $q_0 \to \infty$ に対応する)で矛盾なく定義されているはずだからである．

現在の場合は $\langle T^* j^0(x) j^0(y)\rangle$ も空間成分を含む $\langle T^* j^0(x) j^k(y)\rangle$ も上記の条件を満たすので，$T$ 積に置き換えてよい．このとき一般に

$$
\begin{aligned}
&\lim_{q_0\to\infty} q_0 \int d^4x e^{iq(x-y)} \langle TA(x)B(y)\rangle \\
&= \lim_{q_0\to\infty} \int d^4x e^{iq(x-y)} i\frac{\partial}{\partial x^0}\langle TA(x)B(y)\rangle \\
&= i[A(x),B(y)]\delta(x^0-y^0)
\end{aligned}
\tag{6.8.2}
$$

が成立する．$T$ 積に微分が作用すると $\delta$ 関数を与え，$T$ 積の中に時間微分が入ったものは $T$ 積の定義から 0 になるからである．これを現在のカレントの相関関数に適用すると

$$
\begin{aligned}
&[j^0(x), j^0(y)]\delta(x^0-y^0) = 0 \\
&[j^0(x), j^k(y)]\delta(x^0-y^0) = Ci\partial^k\delta^4(x-y)
\end{aligned}
\tag{6.8.3}
$$

が結論される．ただし，現在の例では $C \sim \Lambda^2 - m^2$ で $c$ 数の不定な数である．この $C$ を含む項が**後藤-今村-Schwinger 項**と呼ばれている．

一方，同じ分析を $A_0 = 0$ ゲージでの Gauss の演算子(第 3 節の非 Abel 的ゲージ理論の場合の(6.3.13)を参照されたい)

$$
G(x) = ej^0(x) + \partial_k \dot{A}^k(x) \tag{6.8.4}
$$

を含む相関関数で行うと

$$
\begin{aligned}
&[G(x), j^\mu(y)]\delta(x^0-y^0) = 0, \\
&[G(x), G(y)]\delta(x^0-y^0) = 0
\end{aligned}
\tag{6.8.5}
$$

が BJL の処方を適用して結論される．演算子 $G(x)$ に含まれるゲージ場が伝播関数を経てカレントに結びつく項が(6.8.3)の $C$ を含む項を相殺する．すなわち，量子異常のない理論では，Gauss の演算子は正しくゲージ変換の生成演算子になっており，電流 $j^\mu(y)$ はゲージ不変な演算子になっている．他方，ゲージ対称性に量子異常を含む場合には，Gauss の演算子を含む交換関係に異常項が現われ，ゲージ対称性を表す代数関係が異常になり，ゲージ理論は正しく量子化されなくなる．この分析の詳細はかなり技術的な問題なのでここでは省略したい．

# 7 Weyl 対称性の量子的破れとくり込み群

この章では，座標のスケール変換あるいは一般には Weyl 変換と呼ばれる変換に伴う量子異常の議論を行う．この量子異常は平坦な時空間を考える極限では，くり込み群の方程式と関係しており，ベータ関数の計算は量子異常の計算と関係する．換言すれば，くり込み群あるいは Callan-Symanzik 方程式と呼ばれるものは，素朴なスケール変換の量子的な破れの表現と理解される．また改良された有限なエネルギー運動量テンソルの定義を与える．

## 7.1 場の理論におけるスケール変換

場の理論におけるスケール変換というものを，QED 型の場の理論を例にとって説明したい．まず出発点になる作用積分は

$$S = \int [\bar{\psi} i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ig_0 A_{\mu})\psi - m_0\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})^2]d^4x \tag{7.1.1}$$

で与えられる．この作用積分で $\alpha$ を定数として次の座標と場の変数の変換(スケール変換と呼ばれる)を考える

$$\begin{aligned} x^{\mu} &\to x'^{\mu} \equiv e^{-\alpha}x^{\mu}, \\ \psi(x) &\to \psi'(x') = e^{\frac{3}{2}\alpha}\psi(x), \\ A_{\mu}(x) &\to A'_{\mu}(x') = e^{\alpha}A_{\mu}(x) \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

作用積分を積分変数 $x'$ で書くと次の式が得られる

$$
\begin{aligned}
S' &= \int d^4x' [\bar{\psi}'(x') i\gamma^\mu (\partial'_\mu - ig_0 A'_\mu(x'))\psi'(x') - m_0 \bar{\psi}'(x')\psi'(x') \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial'_\mu A'_\nu(x') - \partial'_\nu A'_\mu(x'))^2]
\end{aligned} \tag{7.1.3}
$$

この作用積分で上記のスケール変換の変換則と $\partial'_\mu = e^\alpha \partial_\mu$, $d^4x' = d^4xe^{-4\alpha}$ などを用いると

$$
\begin{aligned}
S' &= \int d^4xe^{-4\alpha}[e^{3\alpha}\bar{\psi}(x) i\gamma^\mu e^\alpha (\partial_\mu - ig_0 A_\mu(x))\psi(x) - m_0 e^{3\alpha}\bar{\psi}(x)\psi(x) \\
&\quad - \frac{1}{4}e^{4\alpha}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2] \\
&= \int d^4x[\bar{\psi}(x) i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_0 A_\mu(x))\psi(x) - m_0 e^{-\alpha}\bar{\psi}(x)\psi(x) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2]
\end{aligned} \tag{7.1.4}
$$

となり，質量項で不変性を破っている以外は作用はスケール不変性を持っていることがわかる．すなわち，質量を持たない場の理論はこのような意味で一般にスケール不変性を持っている．スケール変換に現われる定数，$\psi$ に対する 3/2 とか $A_\mu$ に対する 1，は**正準的な質量次元**と呼ばれる．くり込み理論ではよく知られているように，質量のない理論でもくり込み点を決める質量の次元を持つパラメターが導入され，ここで議論したスケール不変性は破れる．

このことを量子異常の観点から考察するのが，この章の目的である．まず，ここで議論した QED は一般座標変換に関して量子異常を持たない理論であることが示される．したがって，座標変換 $x^\mu \to \exp[\alpha]x^\mu$ に量子異常が出るのは不思議である．次に，素朴な正準的な次元で変換したのでは，経路積分のヤコビアンとしては，正しい量子異常が現われないことも知られている．これらの，一見パラドクスと見える性質は，少し曲がった空間で理論を定義し，上記のスケール変換を座標変換と Weyl 変換の組み合わせと考え直すと，すべて矛盾なく理解できる．実は，量子異常はすべて Weyl 変換から出ており，座標変換は一般論どおり QED では量子異常を出さない．

## 7.2 Weyl 変換に関係した恒等式と量子異常

さて，Weyl 変換に関係した WT 恒等式を，計量が平坦に近い極限で定式化したい．まず曲がった空間での Euclid 化は，$e^0_\mu(x) \to -ie^4_\mu(x)$ で定義され，したがって $\sqrt{-g} = \det e^k_\mu \to -i \det e^k_\mu = -i\sqrt{g}$ のように変わる．このような Euclid 理論で一般座標変換に関係した恒等式を導くために，QED 型の理論は付録 B で議論してあるように，曲がった空間では $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を定義して，次のように書かれることを用いる．

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int \sqrt{g}[\bar{\psi} i e^\mu_k \gamma^k (\partial_\mu - \frac{i}{2} A^{mn}_\mu \sigma_{mn} - i g_0 A_\mu)\psi - m_0 \bar{\psi}\psi \\ & -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + iB g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu + \bar{c} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu c] d^4x. \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

ただし第 3 章で議論した Landau ゲージ条件を採用した．この理論は付録 B で説明してあるように，質量項を除いて局所的な Weyl 変換

$$\begin{aligned} & e^\mu_k(x) \to \exp[\alpha(x)] e^\mu_k(x), \quad e_{k\mu}(x) \to \exp[-\alpha(x)] e_{k\mu}(x), \\ & g^{\mu\nu}(x) \to \exp[2\alpha(x)] g^{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu}(x) \to \exp[-2\alpha(x)] g_{\mu\nu}(x) \\ & \psi(x) \to \exp\left[\frac{3}{2}\alpha(x)\right] \psi(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x), \quad c(x) \to c(x) \\ & \bar{c}(x) \to \exp[2\alpha(x)] \bar{c}, \quad B(x) \to \exp[2\alpha(x)] B(x) \\ & \frac{i}{2} A^{mn}_\mu \sigma_{mn} \to \frac{i}{2} A^{mn}_\mu \sigma_{mn} - \frac{1}{2}\partial_\mu \alpha - \gamma_\mu \gamma^\lambda \partial_\lambda \alpha \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

のもとで不変である．重要な点は通常のゲージ場(Yang-Mills 場も含めて)は Weyl 変換を受けない(これは Weyl scalar と呼ばれる)ことであり，したがってゲージ場のゲージ固定に現われるゴースト場 $c(x)$ も Weyl 変換を受けない．

つぎに経路積分

$$\int d\mu \exp[S(e^\mu_k, \psi, A_\mu, c, \bar{c}, B)] \quad (7.2.3)$$

を考える．経路積分の測度は(B.2.8)の一般座標変換に対して不変な

$$d\mu = \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}} \mathcal{D}\tilde{\psi} \mathcal{D}\tilde{A}_a \mathcal{D}\tilde{c} \mathcal{D}\tilde{\bar{c}} \tilde{B} \quad (7.2.4)$$

で与えられ，それぞれの変数の定義と Weyl 変換に対する変換性は

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\psi}(x) \equiv (g)^{1/4}\psi(x) \to \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(x)\right]\tilde{\psi}(x) \\
&\tilde{\bar{\psi}}(x) \equiv (g)^{1/4}\bar{\psi}(x) \to \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(x)\right]\tilde{\bar{\psi}}(x) \\
&\tilde{A}_a(x) \equiv (g)^{1/4}e_a^{\mu}A_\mu(x) \to \exp\left[-\alpha(x)\right]\tilde{A}_a(x) \\
&\tilde{c}(x) \equiv (g)^{1/4}c(x) \to \exp\left[-2\alpha(x)\right]\tilde{c}(x) \\
&\tilde{\bar{c}}(x) \equiv (g)^{1/4}\bar{c}(x) \to \tilde{\bar{c}} \\
&\tilde{B}(x) \equiv (g)^{1/4}B(x) \to \tilde{B}
\end{aligned}
\tag{7.2.5}
$$

で与えられる．ここで注意して欲しいのは，素朴な Weyl 変換の重みと現在の座標変換に関して不変な測度を与える変数の Weyl 変換の重みが全然異なっていることである．とくに，反ゴーストと中西-Lautrup 場は Weyl 変換を受けなくなる．ちなみに，$\mathcal{D}\tilde{B}\mathcal{D}\tilde{\bar{c}} = \mathcal{D}B\mathcal{D}\bar{c}$ が成立する．

このような Euclid 理論で Weyl 変換に関係した恒等式を導くために，QED 型の理論で次の変数を一般的に定義する．

$$
\Phi(x) = (\tilde{\bar{\psi}}(x), \tilde{\psi}(x), \tilde{A}_a(x)) \tag{7.2.6}
$$

このとき，一般座標変換に関して不変な測度は

$$
d\mu = \mathcal{D}\Phi(x)\mathcal{D}\tilde{c}\mathcal{D}\tilde{\bar{c}}\tilde{B} \tag{7.2.7}
$$

で与えられ，一般の物理成分に関する Green 関数を

$$
\langle\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_N)\rangle \equiv \int d\mu\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_N)\exp\left[S\right] \tag{7.2.8}
$$

で定義する．

この Weyl 変換則と経路積分の定義から次の恒等式が得られる

$$
\begin{aligned}
&\int d\mu'\Phi'(x_1)\cdots\Phi'(x_N)\exp\left[S(e'^{\mu}_k, \psi', A'_\mu, c', \bar{c}', B')\right] \\
&= \int d\mu\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_N)\exp\left[S(e'^{\mu}_k, \psi, A_\mu, c, \bar{c}, B)\right] \\
&= \int d\mu J(\alpha)\Phi'(x_1)\cdots\Phi'(x_N)\exp\left[S(e^{\mu}_k, \psi, A_\mu, c, \bar{c}, B)\right. \\
&\qquad \left. + \int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}m_0\bar{\psi}\psi\right]
\end{aligned}
\tag{7.2.9}
$$

ここで，プライム付きの変数は Weyl 変換した変数を表す．とくに $e'^{\mu}_k =$

$\exp[\alpha(x)]e_k^\mu$ である．まず第一の等式は，積分変数の名前の付け方には積分値そのものは依らないという事実を表している．つぎに最初の式から最後の式への移行は，作用が質量項を除いて Weyl 変換に関して不変であるという事実とヤコビアン $J(\alpha)$ を計算することにより積分変数を最初の積分変数に戻した結果を表す．ただし，パラメター $\alpha(x)$ が無限小の式を書いてある．この最後の 2 つの式から，作用積分の中で 4 脚場に無限小の Weyl 変換を施したものはヤコビアンと質量項による Weyl 対称性の破れの効果に等しいことがわかる．ところが，作用の 4 脚場に関する変分はエネルギー運動量テンソルを与え，とくに 4 脚場を Weyl 変換したものはエネルギー運動量テンソルのトレースを与えることを想起する*1と次の恒等式が得られる．

ただし平坦な極限をとったものを書くと

$$
\begin{aligned}
&\langle \tilde{T}^\mu_\mu(x)\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_N)\rangle \\
&= \langle [\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\ln J(\alpha) + m_0\bar{\psi}\psi(x)][\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_N)]\rangle \\
&\quad +\sum_n w_n\delta(x-x_n)\langle\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\cdots\Phi(x_N)\rangle. \qquad (7.2.10)
\end{aligned}
$$

ここで $w_n$ は (7.2.5) に現われる Weyl 変換の重みを表し，Fermi 粒子に対しては $w_n=-1/2$ であり，ゲージ場に対しては $w_n=-1$ である．この式を $x$ に関して積分すると（あるいは（7.2.9）で $\alpha=1$ とすると）大局的な Weyl 変換に関する恒等式

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x\langle \tilde{T}^\mu_\mu(x)\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_N)\rangle \\
&= \langle [\ln J(1) + \int d^4x m_0\bar{\psi}\psi(x) - \frac{1}{2}N_f - N_A][\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_N)]\rangle \\
&\qquad (7.2.11)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで $N_f$ は Green 関数に現われる Fermi 粒子の数，$N_A$ はゲージ場の数を表す．この式でもし正確なヤコビアンが計算できれば，正確な Weyl 恒等式が求められたことになるが，実際には Weyl 変換のヤコビアンの非摂動

*1 $\Phi(x)$ を固定して変分した $\tilde{T}_\mu{}^\mu(x) = (e_k{}^\mu(x)/\sqrt{g})\delta\tilde{S}/\delta e_k{}^\mu(x)$ を用いる．

的な正確な計算は不可能であり，この式はその意味で形式的なものである．しかし，一部面白い物理的な考察は可能である．

## 7.3 一般座標変換に関係した恒等式

Euclid 理論で一般座標変換に関係した恒等式を導くために，QED 型の理論で前節で定義した次の変数を用いる．

$$\Phi(x) = (\tilde{\bar{\psi}}(x), \tilde{\psi}(x), \tilde{A}_a(x)) \tag{7.3.1}$$

このとき，前節で定義した一般座標変換に関して不変な測度は(7.2.7)で与えられ，一般の物理成分に関する Green 関数は(7.2.8)で定義される．一般座標変換に関する変換則は 4 脚場に対しては

$$e_l'^{\lambda}(x) = e_l^{\lambda}(x) + \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}e_l^{\nu}(x) - \partial_{\alpha}\xi^{\nu}e_l^{\alpha}(x) \tag{7.3.2}$$

であり，他のすべての積分変数に関しては共通して

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \xi^{\mu}\partial_{\mu}\Phi(x) + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\xi^{\mu})\Phi(x) \tag{7.3.3}$$

で与えられる．

ちなみにこの座標変換 (7.3.3) に関して量子異常が出ないことは，一般に

$$\Phi(x) = \sum_n a_n\phi_n(x), \quad \int d^4x\phi_n(x)\phi_m(x) = \delta_{nm} \tag{7.3.4}$$

のように展開するときにヤコビアンは

$$\ln J = \int d^4x \sum_n \partial_{\mu}[\xi^{\mu}\phi_n(x)\phi_n(x)] = 0 \tag{7.3.5}$$

のように，展開の基底 $\{\phi_n(x)\}$ の選び方に依らずに 0 になるからである．Fermi 粒子に対しては $\psi$ と $\bar{\psi}$ の間で相殺する．(ただし，本当の重力量子異常が現われるカイラルな理論では，複素の基底が必然的に現われ，現在の議論は成立しなくなる．)

さて，上記の一般座標変換に関する恒等式は

$$\int d\mu'\Phi'(x_1)\cdots\Phi'(x_N)\exp\left[S(e_k'^{\mu}, \Phi'(x), \tilde{c}', \tilde{\bar{c}}', \tilde{B}')\right]$$

$$= \int d\mu \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_N) \exp\left[S(e'^{\mu}_k, \Phi(x), \tilde{c}, \tilde{\bar{c}}, \tilde{B})\right]$$
$$= \int d\mu \Phi'(x_1) \cdots \Phi'(x_N) \exp\left[S(e^{\mu}_k, \Phi(x), \tilde{c}, \tilde{\bar{c}}, \tilde{B})\right] \qquad (7.3.6)$$

で与えられる．この式で第一の等式は，積分変数の名前の付け方には積分値そのものは依らないという関係を表し，最初の式から最後の式への移行は積分の測度は異常項を出さないことおよび作用が一般座標変換に関して不変であるという事実を表している．

この最後の 2 つの式において，

$$\begin{aligned} &S(e'^{\mu}_k, \Phi(x), \tilde{c}, \tilde{\bar{c}}, \tilde{B}) - S(e^{\mu}_k, \Phi(x), \tilde{c}, \tilde{\bar{c}}, \tilde{B}) \\ &= \int d^4x \sqrt{g}(\xi^{\lambda} \partial_{\lambda} e^{\nu}_l(x) - \partial_{\alpha}\xi^{\nu} e^{\alpha}_l(x)) e^{l\mu} \tilde{T}_{\nu\mu}(x) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g}[\xi^{\lambda}\partial_{\lambda} g^{\nu\mu} - \partial_{\alpha}\xi^{\nu} g^{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}\xi^{\mu} g^{\alpha\nu}] \tilde{T}_{\nu\mu}(x) \\ &= \int d^4x \sqrt{g} \xi^{\nu} D^{\mu} \tilde{T}_{\nu\mu}(x) \end{aligned} \qquad (7.3.7)$$

および $\Phi'(x) = \Phi(x) + \xi^{\mu}\partial_{\mu}\Phi(x) + \dfrac{1}{2}(\partial_{\mu}\xi^{\mu})\Phi(x)$ を用いて，無限小のパラメター $\xi^{\nu}(x)$ の 1 次の項を集めて $\xi^{\nu}(x)$ に関して関数微分すると，次の恒等式が得られる．

$$\begin{aligned} &\sqrt{g} D^{\mu}_x \langle \tilde{T}_{\nu\mu}(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_N) \rangle \\ &\equiv \int d\mu \sqrt{g} D^{\mu}_x \tilde{T}_{\nu\mu}(x) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_N) \exp[S] \\ &= \sum_n \left[\delta(x - x_n)\partial^{x_n}_{\nu} - \frac{1}{2}\partial^x_{\nu}\delta(x - x_n)\right] \langle \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \cdots \Phi(x_N) \rangle \end{aligned} \qquad (7.3.8)$$

この恒等式において平坦な空間の極限をとり，くり込み可能な理論の場合は，波動関数のくり込み定数を用いて $\Phi(x) \to \sqrt{Z}\Phi_r(x)$ のように変換しくり込んだ Green 関数へ変換すると

$$\begin{aligned} &\partial^{\mu}_x \langle \tilde{T}_{\nu\mu}(x) \Phi_r(x_1) \cdots \Phi_r(x_N) \rangle \\ &= \sum_n \left[\delta(x - x_n)\partial^{x_n}_{\nu} - \frac{1}{2}\partial^x_{\nu}\delta(x - x_n)\right] \langle \Phi_r(x_1) \cdots \Phi_r(x_n) \cdots \Phi_r(x_N) \rangle \end{aligned} \qquad (7.3.9)$$

が得られる．この式で右辺は有限な量を与えるので，われわれが定義したエネルギー運動量テンソルは発散しない，すなわち**有限な演算子**を与えることがわかる．この有限な $\tilde{T}_{\nu\mu}$ の具体形は後に(7.3.17)で与えられる．このくり込まれた恒等式の両辺に $x^{\nu}$ を乗じて $x$ に関して積分すると，

$$\begin{aligned}&\int d^4x\langle\tilde{T}^{\mu}_{\mu}(x)\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\\&=\sum_n[-x^{\nu}_n\partial^{x_n}_{\nu}-2N]\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\end{aligned}\tag{7.3.10}$$

すなわち，エネルギー運動量テンソルのトレースは座標の伸縮に伴うスケール変換を生成することがわかる．くり込み理論の知識を用いると，くり込まれた Green 関数は次元解析から

$$\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle=x^{-(3/2)N_f-N_A}f(\mu x,m/\mu)\tag{7.3.11}$$

の一般形を持つので，

$$\begin{aligned}&\sum_n x^{\nu}_n\partial^{x_n}_{\nu}\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\\&=\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+m\frac{\partial}{\partial m}-\frac{3}{2}N_f-N_A\right)\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\end{aligned}\tag{7.3.12}$$

が結論される．ただし，$\mu$ はくり込み点を表し，$m$ はくり込まれた質量，$N_f$ と $N_A$ はそれぞれ Green 関数に現われる Fermi 粒子とゲージ場の数を表す．したがって，くり込まれた Green 関数に対する恒等式(7.3.9)は

$$\begin{aligned}&\int d^4x\langle\tilde{T}^{\mu}_{\mu}(x)\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\\&=\left(-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-m\frac{\partial}{\partial m}-\frac{1}{2}N_f-N_A\right)\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\end{aligned}\tag{7.3.13}$$

のように書かれる．

またくり込まれた Green 関数が満たす**くり込み群の方程式**は，裸の Green 関数がくり込み点 $\mu$ に依存しないという関係式

$$\frac{d}{d\mu}\{(\sqrt{Z_f})^{N_f}(\sqrt{Z_A})^{N_A}\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\}=0\tag{7.3.14}$$

から導かれ，くり込まれた結合定数 $g$ を用いて

$$\begin{aligned}
&\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+D_N\right)\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle=0,\\
&D_N\equiv\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\delta(g)m\frac{\partial}{\partial m}+\frac{1}{2}[N_f\gamma_\psi(g)+N_A\gamma_A(g)],\\
&\mu\frac{dg(\mu)}{d\mu}=\beta(g),\quad \mu\frac{dm(\mu)}{d\mu}=\delta(g),\quad \mu\frac{dZ_\psi(\mu)}{d\mu}=\gamma_\psi(g),\\
&\mu\frac{dZ_A(\mu)}{d\mu}=\gamma_A(g)
\end{aligned}\tag{7.3.15}$$

という形をとることを想起すると，恒等式 (7.3.13) は

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\langle\tilde{T}^\mu_\mu(x)\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle\\
&=\left(D_N-m\frac{\partial}{\partial m}-\frac{1}{2}N_f-N_A\right)\langle\Phi_r(x_1)\cdots\Phi_r(x_n)\cdots\Phi_r(x_N)\rangle
\end{aligned}\tag{7.3.16}$$

のように書き変えることができる．ここで $D_N$ に現われるベータ関数と呼ばれる量 $\beta(g)$ は場の理論では非常に基本的な量を与える．

### 改良されたエネルギー運動量テンソル

この節の議論で明らかになった発散しない改良されたエネルギー運動量テンソルの QED 型の理論に対する具体系を与えておくと

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}i\gamma_\mu\vec{D}_\nu\psi-A_\nu[g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi+\partial_\alpha F^\alpha_\mu]-F_{\alpha\nu}F^\alpha_\mu\\
&+\frac{g_{\mu\nu}}{2}[g\bar{\psi}\not{A}\psi+\partial_\alpha(A^\beta F^\alpha_\beta)]+\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^\lambda(\bar{\psi}\gamma^\rho\gamma_5\psi)\\
&+\text{BRST exact piece}
\end{aligned}\tag{7.3.17}$$

最後の BRST(exact な)項は Faddeev–Popov のゲージ固定項とゴースト項をあわせたものからの寄与であり，物理的な状態の間には行列要素を持たない．通常の素朴なエネルギー運動量テンソルとの差は 4 脚場に関して変分をとるときに重みつきの経路積分変数 $\Phi(x)$ を固定して考えることに起因しており，この改良されたテンソルの特徴の一つとして質量項が陽に現われないことがあげられる．

このテンソルの反対称な成分は，反対称なパラメター $\omega^{mn}(x)$ を用いた 4 脚

場の局所 Lorentz 変換

$$e'^{\mu}_{k}(x) = \exp\left[\frac{i}{2} S^{(1)}_{mn}\omega^{mn}\right] e^{\mu}_{k}(x) = e^{\mu}_{k}(x) - \omega_{k}{}^{n}(x) e^{\mu}_{n}(x) \tag{7.3.18}$$

の公式とエネルギー運動量テンソルの定義式(付録 B 参照)からわかるように Lorentz 回転を生成する．したがって平坦な空間で $\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{T}_{S\mu\nu} + \tilde{T}_{A\mu\nu}$ のように対称成分と反対称成分に分けると，対称な成分 $\tilde{T}_{S\mu\nu}$ は(7.3.8)から $S^{\mu}{}_{\nu}(n)$ で生成されるそれぞれの場のスピン成分の Lorentz 回転を分離して取り出した形の恒等式

$$\begin{aligned} &\partial_\mu \langle \tilde{T}^{\mu}_{S\ \mu\nu}(x) \varPhi(x_1) \cdots \varPhi(x_N) \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left[ \delta(x - x_n) \partial^{x_n}_{\nu} + \frac{1}{2} i \partial_\mu \delta(x - x_n) S^{\mu}{}_{\nu}(n) - \frac{1}{2} \partial_\nu \delta(x - x_n) \right] \\ &\quad \times \langle \varPhi(x_1) \cdots \varPhi(x_n) \cdots \varPhi(x_N) \rangle \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

を満たすことになる．

## 7.4　Weyl 量子異常と QCD のベータ関数

7.2 節では，Weyl 恒等式から $\int d^4x \tilde{T}^{\mu}_{\mu}(x)$ を含む恒等式を導き，7.3 節では座標変換に関する恒等式から同じく $\int d^4x \tilde{T}^{\mu}_{\mu}(x)$ を含む恒等式を導いた．これら 2 つの式を等しいと置くことにより，次の関係式が導かれる

$$\begin{aligned} &\left\langle \left[ J_r(1) + (1 - \delta(g)) \int d^4x m N[\bar{\psi}\psi](x) \right]_c \varPhi_r(x_1) \cdots \varPhi_r(x_N) \right\rangle \\ &= \left( D_N - m \frac{\partial}{\partial m} \right) \langle \varPhi_r(x_1) \cdots \varPhi_r(x_N) \rangle \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

ここで，Weyl 恒等式に現われる量をくり込まれた量で書き，特に $N[\bar{\psi}\psi](x)$ は正規積(normal product)と呼ばれ，任意の Green 関数に挿入したときに，発散を一切出さず有限な値を与える演算子として定義される．また $[J(1) + \int d^4x m_0 \bar{\psi}\psi(x)]_c$ の添え字 $c$ は連結した成分を表し，Green 関数の中では他の場の変数と伝播関数でつながっている成分のみを取り出すことを示す．

この式の右辺を演算子に関係づけるために，$gA_\mu(x) \to A_\mu(x)$ のように場の

変数に結合定数を含めたもので定義すると，くり込まれた作用は正規積を用いて

$$S = \int d^4x\{N[\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu)\psi](x) - mN[\bar{\psi}\psi](x) - \frac{1}{4g^2}N[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}](x) + N[iB\partial_\mu A^\mu + \bar{c}\partial_\mu\partial^\mu c](x)\} \tag{7.4.2}$$

のように書かれる．経路積分あるいはもう少し抽象的には Schwinger の作用原理を用いて，上の $\tilde{T}^\mu_\mu$ から導かれた関係式(7.4.1)の右辺において $g$ と $m$ に関する微分を指数関数の肩の作用積分に作用させることにより

$$\beta(g)\frac{\partial}{\partial g} - (1-\delta(g))m\frac{\partial}{\partial m} \rightarrow \int d^4x\frac{\beta(g)}{2g^3}N[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}](x) + (1-\delta(g))\int d^4x mN[\bar{\psi}\psi](x) \tag{7.4.3}$$

という置き換えができることが予想されるが，実はこれはより詳細な分析により示される．したがって(7.4.1)から

$$J_r(1)_c = \int d^4x\frac{\beta(g)}{2g^3}N[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}](x) \tag{7.4.4}$$

のように Weyl 量子異常は，作用に現われるくり込まれたゲージ場の演算子と同一視される．すなわち，Weyl 量子異常の適切な計算はベータ関数の計算を与える．以下で，QED 型の理論と QCD 型の理論で具体例を与えたい．

### QED での最低次のベータ関数

QED の作用では，場の変数に関して 2 次を越える項は Fermi 粒子の作用にのみ現われ，したがってベータ関数の最低次の計算は Fermi 粒子による Weyl 量子異常の計算により与えられる．このヤコビアンの計算はカイラル量子異常の計算と全く同様に進められる．まず，経路積分の変数を

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \sum_n a_n\varphi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n\varphi_n^\dagger(x), \\
&\not{D}\varphi_n(x) \equiv \gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu)\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), \\
&\int d^4x\varphi_n^\dagger(x)\varphi_m(x) = \delta_{nm}
\end{aligned} \tag{7.4.5}$$

のように展開し，経路積分の測度を

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\prod_{n} d\bar{b}_n da_n \tag{7.4.6}$$

で定義すると，Weyl 変換*2

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(x)\right]\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\alpha(x)\right]\bar{\psi}(x) \tag{7.4.7}$$

に関するヤコビアンは((7.4.12)でもう一度詳しく説明するように)

$$\begin{aligned}
\ln J(\alpha) &= \int d^4x\alpha(x) \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\varphi_n^\dagger(x)\varphi_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int d^4x\alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)f\left(\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right)\varphi_n(x) \\
&\equiv \lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\,\alpha(x)f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right) \\
&= \mathrm{tr}\lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)e^{ikx} \\
&= \mathrm{tr}\lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}f\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2} - i\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}}{4M^2}\right)e^{ikx} \\
&= \mathrm{tr}\lim_{M\to\infty}M^4\int d^4x\alpha(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}f\left((ik_\mu + D_\mu/M)^2 - i\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}}{4M^2}\right) \\
&= \lim_{M\to\infty}4M^4\int d^4x\alpha(x)\left[\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}f(-k_\mu k^\mu)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{6M^4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}f''(-k_\mu k^\mu)\right]
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

したがって，場の変数を含む部分(連結成分)は

$$\ln J(\alpha)_c = \int d^4x\alpha(x)\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{(2\pi)^4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \int d^4x\alpha(x)\frac{1}{24\pi^2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{7.4.9}$$

のように計算され，最低次の QED のベータ関数は(7.4.4)から

---

*2　この変換に伴う恒等式は，カイラル恒等式と類似の $\frac{1}{2}\langle\bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - (D_\mu\bar{\psi})i\gamma^\mu\psi\rangle = (1/24\pi^2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ と書かれる．

$$\frac{\beta(g)}{2g^3}=\frac{1}{24\pi^2},\quad \beta(g)=\frac{g^3}{12\pi^2} \tag{7.4.10}$$

というよく知られた値を持つ.

**QCD における最低次のベータ関数**

QCD におけるベータ関数の計算において，まず Fermi 粒子の最低次の寄与の計算は QED の場合と全く同様であるが，カラーの自由度に関するトレースが余分に現われる．ゲージ場の寄与の計算への応用を考えて，Fermi 粒子の計算(7.4.8)の詳細をもう一度復習する.

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\operatorname{Tr}\alpha(x)f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\\
&=\operatorname{tr}\lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}f\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}-i\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}}{4M^2}\right)e^{ikx}\\
&=\operatorname{tr}\lim_{M\to\infty}M^4\int d^4x\alpha(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}f\left((ik_\mu+D_\mu/M)^2-i\frac{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}}{4M^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

において，$1/M$ に関するべき展開を考え $1/M^4$ かそれよりも大きな項のみが寄与することを用いる．$F=(-i/4)[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}$ を定義すると

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\operatorname{Tr}\alpha(x)f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\\
&=\operatorname{tr}\lim_{M\to\infty}M^4\int d^4x\alpha(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}f^{(l)}(-k^2)\left[\frac{2ik_\mu D^\mu}{M}+\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}+\frac{F}{M^2}\right]^l\\
&=\operatorname{tr}\lim_{M\to\infty}M^4\int d^4x\alpha(x)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{f(-k^2)+f^{(1)}(-k^2)\left[\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right]\right.\\
&\quad+\frac{1}{2!}f^{(2)}(-k^2)\left[\left(\frac{2ik_\mu D^\mu}{M}\right)^2+\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right)^2+\left(\frac{F}{M^2}\right)^2\right]\\
&\quad+\frac{1}{3!}f^{(3)}(-k^2)\left[\left(\frac{2ik_\mu D^\mu}{M}\right)^2\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right)+\left(\frac{2ik_\mu D^\mu}{M}\right)\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right)\left(\frac{2ik_\mu D^\mu}{M}\right)\right.\\
&\quad\left.\left.+\left(\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}\right)\left(\frac{2ik_\mu D^\mu}{M}\right)^2\right]+\frac{1}{4!}f^{(4)}(-k^2)\left[\frac{2ik_\mu D^\mu}{M}\right]^4\right\}
\end{aligned} \tag{7.4.12}$$

ここで $k_\mu$ の奇数次の項は 0 になることと，Dirac の $\gamma^\mu$ 行列を含むのは $F$ のみ

であり $\mathrm{tr}\, F = 0$ を用いた．

ここで $k_\mu$ のべきの項で対称積分をして

$$k_\mu k_\nu \to \frac{k^2}{4} g_{\mu\nu}, \qquad k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta \to \frac{(k^2)^2}{24}[g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}] \tag{7.4.13}$$

の置き換えができること，および（現在の計量では $k^2 < 0$ に注意して）

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!}\int d^4k f^{(2)}(-k^2)(-k^2) &= -\int d^4k f^{(1)}(-k^2), \\ \frac{1}{3!}\int d^4k f^{(3)}(-k^2)(-k^2) &= -\frac{1}{3}\int d^4k f^{(2)}(-k^2), \\ \frac{1}{4!}\int d^4k f^{(4)}(-k^2)(-k^2)^2 &= \frac{1}{4}\int d^4k f^{(2)}(-k^2), \\ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f^{(2)}(-k^2) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \end{aligned} \tag{7.4.14}$$

を用いると

$$\begin{aligned} &\lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\,\alpha(x) f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right) \\ &= \mathrm{tr}\lim_{M\to\infty} M^4 \int d^4x \alpha(x) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(-k^2) \\ &\quad + \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{(4\pi)^2}\,\mathrm{tr}\,[\frac{1}{6}D_\mu D_\alpha(D^\mu D^\alpha - D^\alpha D^\mu) + \frac{1}{2}F^2] \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

が得られ，連結成分は有限になり最終的に

$$\begin{aligned} &\lim_{M\to\infty} \mathrm{Tr}\,\alpha(x) f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)_c \\ &= \int d^4x \alpha(x) \frac{1}{(4\pi)^2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{i^2}{12}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}F^2\right] \\ &= \frac{1}{24\pi^2}\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

のように求められる．この計算で重要なことは，正則化に用いた $f(x)$ が大きな $x$ ではやく収束するという条件と $f(0) = 1$ 以外の関数形の詳細には，有限な連結成分は依存しないことである．

QCD においては，ゲージ場も最低次のベータ関数に寄与するが，その寄与を背景場の方法(background field method)を用いて Weyl 量子異常の計算により求めたい．ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2 \tag{7.4.17}$$

で与えられ，背景場の方法を用いるために場の量を

$$A_\mu^a(x) = B_\mu^a(x) + a_\mu^a(x) \tag{7.4.18}$$

のように，古典的な背景場 $B_\mu^a$ と量子的な揺らぎの場 $a_\mu^a$ に分解する．このとき場の強さは

$$F_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}(B) + D_\mu a_\nu^a - D_\nu a_\mu^a + f^{abc}a_\mu^b a_\nu^c \tag{7.4.19}$$

で与えられ，共変微分は

$$(D_\mu a_\nu)^a \equiv \partial_\mu a_\mu^a + f^{abc}B_\mu^b a_\nu^c \tag{7.4.20}$$

で定義した．ゲージ場の $\omega^a(x)$ をパラメターとするゲージ変換は $a_\mu^a$ が力学的な量であることに注意して，

$$\begin{aligned} a_\mu'^a &= a_\mu^a + (D_\mu\omega)^a + f^{abc}a_\mu^b\omega^c \\ B_\mu'^a &= B_\mu^a \end{aligned} \tag{7.4.21}$$

で定義する．ゲージ場の強さを作用に代入して，$B_\mu^a$ が形式的に運動方程式を満たすと考えると(このことは，背景場の方法の基本である)，$a_\mu^a$ に関して 1 次の項は現われず，

$$\begin{aligned} \int d^4x\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4g^2}\int d^4x F_{\mu\nu}^a(B)F^{a\mu\nu}(B) \\ & +\frac{1}{2g^2}\int d^4x[a_\nu^b(D_\mu D^\mu a^{b\nu}) + 2a^{\mu a}f^{acb}F_{\mu\nu}^c(B)a^{\nu b}] \\ & +\frac{1}{2g^2}\int d^4x[(D^\mu a_\mu)^b(D^\nu a_\nu)^b] + O((a_\mu)^3) \end{aligned} \tag{7.4.22}$$

のようになる．ここで，記法および後のトレースの計算を簡単にするために共変微分を

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iB_\mu^a t^a, \quad (t^a)^{bc} \equiv if^{bac} \tag{7.4.23}$$

のように書くと，ゲージ場 $a_\mu(x)$ を群 $SU(n)$ に対しては $n^2-1$ 成分の縦ベクトルとして，

$$D_\mu a_\nu = \partial_\mu a_\nu - iB_\mu a_\nu, \quad B_\nu \equiv B^a_\nu t^a \tag{7.4.24}$$

のように共変微分の記法が簡単化される．

ゲージ固定の作用としては $\xi = 1$ の Feynman ゲージを採用して

$$\begin{aligned} S_g &= \int d^4x \mathcal{L}_g = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(gB)^2 - BD^\nu a_\nu + i\bar{c}D^\mu(D_\mu c - ia^a_\mu t^a c)\right] \\ &\to \int d^4 \left[-\frac{1}{2g^2}(D^\mu a_\mu)^2 + i\bar{c}D^\mu(D_\mu c - ia^a_\mu t^a c)\right] \end{aligned} \tag{7.4.25}$$

のように変数 $c$, $\bar{c}$ も $a_\mu$ と同じくベクトル記法を用いて，中西-Lautrup 場 $B$ に関して積分したのちの表式を用いる．

このとき，ゲージ固定項を付け加えた Yang-Mills 場の全作用の力学的な変数に関して 2 次の項は

$$S^{(2)} = \frac{1}{2g^2}\int d^4x[a_\nu(D_\mu D^\mu a^\nu) - 2ia^\mu F_{\mu\nu}(B)a^\nu + i\bar{c}D^\mu D_\mu c] \tag{7.4.26}$$

と書ける．ここで

$$F_{\mu\nu}(B) = F^a_{\mu\nu}t^a = i[D_\mu, D_\nu] \tag{7.4.27}$$

という記法を導入した．この 2 次の項からなる作用に基づいて，Weyl 量子異常を計算する．経路積分の積分変数の Weyl 変換則はすでに(7.2.5)で説明したように

$$\begin{aligned} \tilde{a_k}(x) &\equiv (g)^{1/4}e^\mu_k a_\mu(x) \to \exp[-\alpha(x)]\tilde{a_k}(x) \\ \tilde{c}(x) &\equiv (g)^{1/4}c(x) \to \exp[-2\alpha(x)]\tilde{c}(x) \\ \tilde{\bar{c}}(x) &\equiv (g)^{1/4}\bar{c}(x) \to \tilde{\bar{c}} \end{aligned} \tag{7.4.28}$$

の平坦な空間の極限で定義される．したがって，Weyl 変換のヤコビアンは(連結成分だけを書いて)ゲージ場からの寄与は $(F)_{\mu\nu} = -2iF_{\mu\nu}(B)$ という記法を用いると，すでに説明した Fermi 粒子の場合の一般的な公式(7.4.16)が使えて

$$\begin{aligned} \ln J_{a_\mu} &= \lim_{M\to\infty}(-1)\,\mathrm{Tr}\,\alpha(x)f\left(\frac{D^\mu D_\mu + F}{M^2}\right) \\ &= (-1)\frac{1}{(4\pi)^2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{i^2}{12}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B) + \frac{1}{2!}F^2\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{(4\pi)^2}(-1)\,\mathrm{tr}\,(t^a t^b)\left[\frac{4}{12}F^a_{\mu\nu}(B)F^{a\mu\nu}(B)+\frac{4}{2!}F^a_{\mu\nu}(B)F^{a\mu\nu}(B)\right]\\
&= \frac{1}{(4\pi)^2}C_2(G)\left[\frac{4}{12}-\frac{4}{2!}\right]F^a_{\mu\nu}(B)F^{a\mu\nu}(B)\\
&= \frac{(-5)}{48\pi^2}C_2(G)F^a_{\mu\nu}(B)F^{a\mu\nu}(B) \qquad (7.4.29)
\end{aligned}
$$

のように計算される．ただし，3行目の変形で，まずゲージ場 $a_\mu$ が持つ Minkowski の足に関するトレースを計算し，最後にゲージ群の随伴表現に関するトレースの計算を

$$\mathrm{tr}\, t^a t^b = -f^{cad} f^{dbc} \equiv C_2(G)\delta_{ab} \qquad (7.4.30)$$

を用いて計算した．群 $SU(n)$ に関しては $C_2(G)=n$ で与えられる．

同様に，ゴースト場からの Weyl 量子異常は（ゴースト場は Grassmann 数で表されることを考慮して）

$$
\begin{aligned}
\ln J_c &= \lim_{M\to\infty} 2\,\mathrm{Tr}\,\alpha(x)f\left(\frac{D^\mu D_\mu}{M^2}\right)\\
&= 2\frac{1}{(4\pi)^2}\,\mathrm{tr}\left[\frac{i^2}{12}F_{\mu\nu}(B)F^{\mu\nu}(B)\right]\\
&= \frac{2}{(4\pi)^2}\frac{(-1)}{12}\,\mathrm{tr}\,(t^a t^b)[F^a_{\mu\nu}(B)F^{a\mu\nu}(B)]\\
&= \frac{(-1)}{96\pi^2}C_2(G)F^a_{\mu\nu}(B)F^{a\mu\nu}(B). \qquad (7.4.31)
\end{aligned}
$$

これらの Weyl 量子異常の計算をすべて加えると，$f$ 個の Fermi 粒子を含む QCD 型の理論のベータ関数は（7.4.4）を考慮して

$$\frac{\beta(g)}{2g^3} = \frac{f}{48\pi^2} - \frac{5}{48\pi^2}C_2(G) - \frac{1}{96\pi^2}C_2(G) \qquad (7.4.32)$$

すなわち，最低次の量子効果を含むベータ関数は

$$\beta(g) = g^3\left[\frac{f}{24\pi^2} - \frac{11}{48\pi^2}C_2(G)\right] \qquad (7.4.33)$$

というよく知られた式で与えられる．

## 7.5 曲がった空間での Weyl 量子異常

ここで，曲がった空間の計量に関係して現われる Weyl 量子異常の代表的なものを，QED 型の理論を例に簡単に説明したい．具体的なヤコビアンの計算には熱核法(heat kernel)とか $\zeta$ 関数正則化といった技術的に込み入った計算法が必要であるが，ここでは結果のみを述べることにする．作用は Feynman ゲージで量子化した理論を用いる．

$$\begin{aligned} S &= \int \sqrt{g}[\bar{\psi} i e_k^\mu \gamma^k (\partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{mn} \sigma_{mn} - igA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu)^2 + \bar{c} g^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu c] d^4x \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

まず Fermi 粒子の量子効果で作り出される Weyl 量子異常を議論すると，場の変数の Weyl 変換は

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &= (g)^{1/4}\psi \to \exp[-\frac{1}{2}\alpha(x)]\tilde{\psi}(x), \\ \tilde{\bar{\psi}}(x) &= (g)^{1/4}\bar{\psi} \to \exp[-\frac{1}{2}\alpha(x)]\tilde{\bar{\psi}}(x) \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

で与えられ，変数を

$$\begin{aligned} &\tilde{\bar{\psi}}(x) = \sum_n a_n (g)^{1/4} \varphi_n(x), \quad \tilde{\bar{\psi}}(x) = \sum_n \bar{b}_n (g)^{1/4} \varphi_n^\dagger(x), \\ &\not{D}\varphi_n \equiv e_k^\mu \gamma^k (\partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{mn}\sigma_{mn} - igA_\mu)\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \\ &\int \sqrt{g}\varphi_n(x)\varphi_m(x) d^4x = \delta_{n,m} \end{aligned} \tag{7.5.3}$$

で展開すると，Weyl 量子異常はヤコビアン($\psi$ と $\bar{\psi}$ の和)

$$\begin{aligned} \ln J_\psi(\alpha) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int d^4x \alpha(x) \sqrt{g} \varphi_n^\dagger(x) \varphi_n(x) \\ &= \lim_{M\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x \alpha(x) \sqrt{g} \varphi_n^\dagger(x) \exp[-\frac{\lambda_n^2}{M^2}] \varphi_n(x) \\ &\equiv \lim_{M\to\infty} \int d^4x \alpha(x) \sqrt{g} \langle x| \exp[-\frac{\not{D}^2}{M^2}] |x\rangle \end{aligned} \tag{7.5.4}$$

で与えられる．この計算を $\zeta$ 関数正則化の途中で現われる表式を用いて行うと

Weyl 量子異常は

$$\lim_{M\to\infty}\langle x|\exp[-\frac{\not{D}^2}{M^2}]|x\rangle = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{(4\pi)^2}\left[4M^4+\frac{1}{3}M^2R+\left(\frac{1}{30}D^\mu D_\mu R\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{72}R^2-\frac{1}{45}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}-\frac{7}{360}R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho}\right] \tag{7.5.5}$$

で与えられる．ただし，前節で議論したゲージ場の量子異常への寄与は除いてある．ここで，$M^4$ の項は相殺項で相殺でき，$RM^2$ の項は $\zeta$ 関数正則化では最終的な結果には現われないことが知られている．

つぎに，ゲージ場および Faddeev-Popov のゴースト場の作用積分は

$$S_A=\int d^4x\sqrt{g}\{\frac{1}{2}A_a[(D^\mu D_\mu)^{ab}-R^{ab}]A_b+\bar{c}D^\mu D_\nu c\} \tag{7.5.6}$$

と書けることに注意する．ここで，ゲージ場に作用する共変微分は付録 B に説明してあるように

$$D_\mu=\partial_\mu+i\Gamma_{\beta\mu}{}^{\alpha}U_\alpha{}^{\beta}-\frac{i}{2}A_\mu{}^{mn}S^{(1)}_{mn} \tag{7.5.7}$$

である．

場の変数の Weyl 変換則は

$$\begin{aligned}\tilde{A}_a(x)&=(g)^{1/4}e^\mu_a A_\mu(x)\to\exp[-\alpha(x)]\tilde{A}_a(x),\\ \tilde{c}(x)&=(g)^{1/4}c(x)\to\exp[-2\alpha(x)]\tilde{c}(x),\\ \tilde{\bar{c}}(x)&=(g)^{1/4}\bar{c}\to\tilde{\bar{c}}(x)\end{aligned} \tag{7.5.8}$$

で与えられ，場の変数を

$$\begin{aligned}&A_a(x)=\sum_n a_n V_{a,n}(x),\quad \int d^4x\sqrt{g}\,V_n(x)^{\mathrm{T}}V_m(x)=\delta_{n,m},\\ &[(D_\mu D^\mu)_a{}^b-R_a{}^b]V_{b,n}=\lambda_n V_{a.n}\end{aligned} \tag{7.5.9}$$

および

$$\begin{aligned}&c(x)=\sum_n \alpha_n S_n(x),\quad \int d^4x\sqrt{g}S_n(x)S_m(x)=\delta_{n,m},\\ &D^\mu D_\mu S_n=\lambda_n S_n\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

のように展開する．このとき Weyl 量子異常を与えるヤコビアンはゲージ場の寄与としては

$$
\begin{aligned}
&\ln J_A(\alpha) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}(-1)V_n(x)^{\mathrm{T}}V_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)V_n(x)^{\mathrm{T}}\exp[-\frac{\lambda_n^2}{M^2}]V_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)V_{a,n}(x)^{\mathrm{T}}\exp\left[-\frac{(D_\mu D^\mu-R)^{ab}}{M^2}\right]V_{b,n}(x) \\
&\equiv \lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}(-1)\,\mathrm{tr}\,\langle x|\exp\left[\frac{(D_\mu D^\mu-R)}{M^2}\right]|x\rangle \\
&= \int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}\left\{\frac{(-4)}{(4\pi)^2}\left[\frac{1}{72}R^2+\frac{1}{30}D^\mu D_\mu R-\frac{1}{180}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right.\right. \\
&\quad\left.+\frac{1}{180}R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}\right]+\frac{(-1)}{(4\pi)^2}\left[-\frac{1}{6}R^2-\frac{1}{6}D^\mu D_\mu\right. \\
&\quad\left.\left.+\frac{1}{2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}-\frac{1}{12}R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}\right]\right\} \qquad (7.5.11)
\end{aligned}
$$

およびゴースト場は Grassmann 数であることに注意して

$$
\begin{aligned}
&\ln J_c(\alpha) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}(2)S_n(x)S_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}\sum_{n=1}^{\infty}(2)S_n(x)\exp[-\frac{\lambda_n^2}{M^2}]S_n(x) \\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}\sum_{n=1}^{\infty}(2)S_n(x)\exp[-\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}]S_n(x) \\
&\equiv \lim_{M\to\infty}\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}(2)\langle x|\exp[\frac{D_\mu D^\mu}{M^2}]|x\rangle \\
&= \int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}\left\{\frac{(2)}{(4\pi)^2}\left[\frac{1}{72}R^2+\frac{1}{30}D^\mu D_\mu R-\frac{1}{180}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+\frac{1}{180}R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}\right]\right\} \qquad (7.5.12)
\end{aligned}
$$

のように，$\zeta$ 関数正則化の計算の途中に現われる式を用いて計算される．ただし，適当な相殺項を用いて相殺できる宇宙項に対応する $\sqrt{g}M^4$ の項および $\zeta$ 関

数正則化では除かれる 2 次の発散に対応する $\sqrt{g}RM^2$ の項は省略してある.

したがって，最終的なゲージ場とゴースト場の寄与の和は

$$\begin{aligned}&\ln J_A(\alpha)+\ln J_c(\alpha)\\&=\int d^4x\alpha(x)\sqrt{g}\\&\times\frac{1}{(4\pi)^2}\left[\frac{5}{36}R^2+\frac{1}{10}D^\mu D_\mu R-\frac{44}{90}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+\frac{13}{180}R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}\right]\end{aligned} \tag{7.5.13}$$

で与えられる.

## 7.6 2 次元空間における Weyl 量子異常

Euclid 的な一般には曲がった 2 次元時空での Weyl 量子異常は共形場の理論との関連で重要である．この節では，質量を持たないスカラー場と Dirac 場に関係した Weyl 量子異常の計算を議論したい．具体的な計算を行うために便利な座標条件として，空間の計量に対して共形ゲージ(conformal gauge)という条件を採用する．この条件は 2 次元時空に特有なゲージ条件であり

$$\begin{aligned}&g_{\mu\nu}(x)=\rho(x)\eta_{\mu\nu},\quad g^{\mu\nu}=\frac{1}{\rho(x)}\eta^{\mu\nu},\\&e_k^\mu=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\delta_k^\mu,\quad e_{k\mu}=\sqrt{\rho}\eta_{k\mu},\\&G_{mn}=(-1,-1),\quad \{\gamma^a,\gamma^b\}=2G^{ab},\quad (\gamma^a)^\dagger=-\gamma^a\end{aligned} \tag{7.6.1}$$

で指定される．本書では Euclid 空間の計量は Minkowski の計量から Wick 回転して定義し，$G_{mn}=(-1,-1)=\eta_{\mu\nu}$ にとる.

このときスカラー場 $X(x)$ の作用は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\mu X(x)\partial_\nu X(x)\\&=\frac{1}{2}\int d^2x\partial_\mu X(x)\partial^\mu X(x)\end{aligned} \tag{7.6.2}$$

と書かれ，Dirac 粒子の作用は

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x\sqrt{g}\bar{\psi}(x)ie_k^\mu\gamma^k(\partial_\mu - \frac{i}{2}\sigma^{ab}A_{\mu ab})\psi(x) \\ &= \int d^2x\sqrt{\rho}i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu\rho)\psi \\ &= \int d^2x\bar{\psi}i\gamma^\mu\rho^{1/4}\partial_\mu(\rho^{1/4}\psi) \end{aligned} \tag{7.6.3}$$

のように書かれる．

これらの式から，スカラー場の理論は次の Weyl 変換

$$\rho(x) \to e^{-2\alpha(x)}\rho(x), \quad X(x) \to X(x) \tag{7.6.4}$$

の下で不変であり，Dirac 粒子の理論は Weyl 変換

$$\rho(x) \to e^{-2\alpha(x)}\rho(x), \quad \psi(x) \to e^{(1/2)\alpha(x)}\psi(x) \tag{7.6.5}$$

の下で不変であることがわかる．

しかし，これらの Weyl 対称性は座標変換に関して不変なように定義された量子論では，量子異常により破れている．経路積分において重み付きの変数 $\tilde{X}(x) = (g)^{1/4}X(x) = \sqrt{\rho}X(x)$ あるいは $\tilde{\psi}(x) = (g)^{1/4}\psi(x) = \sqrt{\rho}\psi(x)$ を用いて，一般座標変換に関して不変な測度を定義すると，

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\tilde{X}\exp\left[\frac{1}{2}\int d^2x\partial_\mu X(x)\partial^\mu X(x)\right] = \int \mathcal{D}\tilde{X}\exp\left[\frac{-1}{2}\int d^2x\tilde{X}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu^2\frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{X}\right], \\ &\int \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi}\exp\left[\tilde{\bar{\psi}}i\gamma^\mu\frac{1}{\rho^{1/4}}\partial_\mu\left(\frac{1}{\rho^{1/4}}\tilde{\psi}\right)\right] \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

が得られ，測度を定義する完全系はそれぞれ

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{\sqrt{\rho}}\varphi_n^{(0)} \equiv H^{(0)}\varphi_n^{(0)} = \lambda_n^2\varphi_n^{(0)}, \\ &\left(i\gamma^\mu\frac{1}{\rho^{1/4}}\partial_\mu\left(\frac{1}{\rho^{1/4}}\right)\right)^\dagger i\gamma^\mu\frac{1}{\rho^{1/4}}\partial_\mu\left(\frac{1}{\rho^{1/4}}\right)\varphi_n^{(1/2)} \equiv H^{(1/2)}\varphi_n^{(1/2)} = \lambda_n^2\varphi_n^{(1/2)} \end{aligned} \tag{7.6.7}$$

で与えられ，Weyl 変換

$$\begin{aligned} &\tilde{X}(x) \to \exp[-\alpha(x)]\tilde{X}(x), \\ &\tilde{\psi}(x) \to \exp[-\frac{1}{2}\alpha(x)]\tilde{\psi} \end{aligned} \tag{7.6.8}$$

に対するヤコビアン（Weyl 量子異常）はそれぞれ

$$\begin{aligned}\ln J^{(0)}(\alpha) &\equiv \int d^2x\alpha(x)\mathcal{A}_W^{(0)} \\ &= -\lim_{N\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\sum_{n=1}^{N}\varphi_n^{(0)}(x)\varphi_n^{(0)}(x) \\ &= -\lim_{M\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{(0)}(x)\exp\left[-\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right]\varphi_n^{(0)}(x) \\ &= -\lim_{M\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\langle x|\exp\left[-\frac{H^{(0)}}{M^2}\right]|x\rangle \end{aligned}\tag{7.6.9}$$

および

$$\begin{aligned}\ln J^{(1/2)}(\alpha) &\equiv \int \alpha(x)\mathcal{A}_W^{(1/2)} \\ &= \lim_{N\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\sum_{n=1}^{N}\varphi_n^{(1/2)}(x)\varphi_n^{(1/2)}(x) \\ &= \lim_{M\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{(1/2)}(x)\exp\left[-\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right]\varphi_n^{(1/2)}(x) \\ &= \lim_{M\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\,\mathrm{tr}\,\langle x|\exp\left[-\frac{H^{(1/2)}}{M^2}\right]|x\rangle \end{aligned}\tag{7.6.10}$$

で与えられる．ただしトレースはスピナーの自由度にわたるものである．

$H^{(1/2)} = (1/\rho^{1/4})\partial\!\!\!/(1/\rho^{1/2})\partial\!\!\!/(1/\rho^{1/4})$ なので，スカラー場および Dirac 場の量子異常の計算は

$$H = \rho^{-(n+1)/2}\,\partial\!\!\!/\rho^n\,\partial\!\!\!/\rho^{-(n+1)/2} \tag{7.6.11}$$

を用いた計算で，それぞれ $n=0$ あるいは $n=-1/2$ とおいたものから求められることがわかる．

量子異常の計算はしたがって

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-ikx}\exp\left[-\frac{\rho^{-(n+1)/2}\,\partial\!\!\!/\rho^n\,\partial\!\!\!/\rho^{-(n+1)/2}}{M^2}\right]e^{ikx} \\ &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\,M^2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp\Bigg[k^2\rho^{-1} - \frac{i k\!\!\!/}{M}\rho^{(n-1)/2}\,\partial\!\!\!/\rho^{-(n+1)/2} \\ &\qquad - \rho^{-(n+1)/2}\,\partial\!\!\!/\rho^{(n-1)/2}\frac{i k\!\!\!/}{M} - \frac{\rho^{-(n+1)/2}\,\partial\!\!\!/\rho^n\,\partial\!\!\!/\rho^{-(n+1)/2}}{M^2}\Bigg]\end{aligned}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{2}{4\pi}\left[M^2\rho + \left(\frac{3n+1}{6}\right)\partial_\mu\partial^\mu \ln\rho\right] \tag{7.6.12}$$

のように遂行される．全体にかかる因子 2 はトレースから出る．

この実際の計算の概要は次のようなものである．まず

$$\begin{aligned} H_0 &= k^2/\rho, \\ H_I &= -\frac{i\not{k}}{M}\rho^{(n-1)/2}\not{\partial}\rho^{-(n+1)/2} \\ &\quad -\rho^{-(n+1)/2}\not{\partial}\rho^{(n-1)/2}\frac{i\not{k}}{M} - \frac{\rho^{-(n+1)/2}\not{\partial}\rho^n\not{\partial}\rho^{-(n+1)/2}}{M^2} \end{aligned} \tag{7.6.13}$$

を定義して，相互作用表示の計算にならって

$$\exp\left[H_0+H_I\right] = \exp\left[H_0\right]\left\{1+\int_0^1 dtH_I(t) + \int_0^1 dtH_I(t)\int_0^t dt'H_I(t')\right\} \tag{7.6.14}$$

のように $1/M$ に関して 2 次の項まで展開する．ただし $H_I(t) = \exp\left[-H_0t\right]H_I \exp\left[H_0t\right]$ は $H_I$ において

$$\partial_\mu \to \exp\left[-H_0t\right]\partial_\mu \exp\left[H_0t\right] = \partial_\mu + k^2(\partial_\mu(\frac{1}{\rho}))t \tag{7.6.15}$$

という置き換えをして求められる．この展開式を

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp\left[H_0+H_I\right] \tag{7.6.16}$$

に用いて，$k_\mu$ に関して奇数べきの項は 0 になり

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp\left[k^2/\rho\right] = \frac{1}{4\pi}\rho, \quad \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp\left[k^2/\rho\right](-k^2)^n = \frac{n!}{4\pi}\rho^{n+1},$$
$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp\left[k^2/\rho\right]k_\mu k_\nu = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp\left[k^2/\rho\right]k^2 = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{8\pi}\rho^2$$

に注意すれば最終的な結果が得られる．

このようにして 2 次元の質量 0 の場に対する Weyl 量子異常は(7.6.12)から

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_W^{(0)}(x) &= -\frac{1}{4\pi}[M^2\sqrt{g} + \frac{1}{6}\sqrt{g}R] \\
\mathcal{A}_W^{(1/2)} &= \frac{1}{2\pi}[M^2\sqrt{g} - \frac{1}{12}\sqrt{g}R]
\end{aligned}
\tag{7.6.17}
$$

のように求められる．ただし，$R$ をスカラー曲率として $\sqrt{g}=\rho$ および $\sqrt{g}R=\partial_\mu\partial^\mu \ln\rho$ を用いた．$\sqrt{g}M^2$ の項は，適当な宇宙項を相殺項として作用に付け加えておけば除去できる．

## 7.7 Weyl 量子異常のその他の応用

Weyl 量子異常の計算法のその他の重要な応用は，本書では議論しないが，超対称性(Bose–Fermi 対称性)を持つ場の理論において知られている．1つは小西量子異常と呼ばれるもので，Weyl 量子異常の超対称性理論版に当たるものである．もう1つは，本書で議論した $\beta$ 関数の超対称性理論への一般化に関するものである．超対称性を持つ理論の特徴としてくり込みの性質が，通常の理論に比して格段によくなること(非くり込み定理とその一般化)がある．そのために，ある特別な状況の下では，すべての次数に渡る量子効果が正確に計算できる場合がある．そのような場合には，本書で議論した計算法は超対称性を正確に満たす超場の方法と呼ばれているものに一般化できることが知られており，興味のある結果が得られている．これらの詳細に関しては，巻末の参考文献をご覧いただきたい．

# 8 重力量子異常と一般座標変換の量子的破れ

この章では重力場の関係したカイラル量子異常を議論する．まず通常のゲージ理論でのカイラル $U(1)$ 量子異常と呼ばれているものの重力場への一般化を議論する．このため一般の $2n$ 次元での Dirac 示性数(genus)と呼ばれるものと Chern 指標(character)を計算する方法を与える．次に，カイラルな Dirac 粒子と重力場が結合しているときには，$4n+2$ 次元の時空では Einstein の一般座標変換あるいは局所 Lorentz 変換に量子異常が現われ，一般相対論の原理と量子論の原理は両立できないことを説明する．

## 8.1 重力の関係したカイラル $U(1)$ 量子異常

この節では，背景場としての重力場および QCD 型の $SU(N)$ ゲージ場に結合した Dirac 粒子を考察する．時空間としては，任意の偶数 $2n$ 次元の Euclid 空間を考える．作用は，量子化される Dirac 粒子の部分のみを書くと

$$S = \int d^{2n}x\sqrt{g}[\bar{\psi}ie_k^{\mu}\gamma^k(\partial_\mu - \frac{i}{2}A_\mu^{mn}\sigma_{mn} - iA_\mu^a T^a)\psi - m\bar{\psi}\psi] \tag{8.1.1}$$

で与えられる(付録 B 参照)．この作用は最後の質量項を除いて，定数のパラメター $\alpha$ を用いた次のカイラル変換

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = \exp[i\alpha\gamma_{2n+1}]\psi(x),\\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\exp[i\alpha\gamma_{2n+1}]\end{aligned} \tag{8.1.2}$$

の下で不変である．ここで $\gamma_{2n+1}$ は 4 次元時空間の $\gamma_5$ の $2n$ 次元の時空間へ

の一般化であり，$2n$ 個のすべての Dirac の $\gamma$ 行列の積で与えられる．

$$\gamma_{2n+1} \equiv (-i)^n \gamma^1 \gamma^2 \cdots \gamma^{2n}, \quad \gamma_{2n+1}^\dagger = \gamma_{2n+1},$$
$$\gamma_{2n+1}^2 = 1, \quad \{\gamma_{2n+1}, \gamma^k\}_+ = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, 2n \tag{8.1.3}$$

ただし，$2n$ 個のすべての $\gamma$ 行列は反エルミート的にとる

$$(\gamma^a)^\dagger = -\gamma^a, \quad \{\gamma^a, \gamma^b\}_+ = 2G^{ab},$$
$$\sigma_{ab} = \frac{i}{4}[\gamma_a, \gamma_b], \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = 2g^{\mu\nu} \tag{8.1.4}$$

また $\gamma^\mu = e_k^\mu \gamma^k$ を定義した．このとき，最も一般的な Dirac の演算子

$$\not{D} \equiv e_k^\mu \gamma^k D_\mu = e_k^\mu \gamma^k [\partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{mn} \sigma_{mn} - i U_\alpha^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - i A_\mu^a T^a] \tag{8.1.5}$$

は Euclid 的な意味での内積に関してエルミート演算子になる，すなわち

$$(\Phi, \not{D}\Psi) \equiv \int d^{2n}x \sqrt{g} \Phi^\dagger(x) \not{D}\Psi(x) = \int d^{2n}x \sqrt{g} (\not{D}\Phi(x))^\dagger \Psi(x) = (\not{D}\Phi, \Psi) \tag{8.1.6}$$

が成立する．ただし，Minkowski の足を持たない Dirac 粒子そのものに作用するときには，一般座標変換の演算子 $U_\alpha^\beta$ は 0 になるものとする．

経路積分の測度を定義するために完全系

$$\not{D}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad \int d^{2n}x \sqrt{g} \varphi_n^\dagger(x) \varphi_m(x) = \delta_{n,m} \tag{8.1.7}$$

を定義し，

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{b}_n \varphi_n^\dagger(x), \quad \psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) \tag{8.1.8}$$

のように展開する．このとき一般座標変換に関して不変な測度を重み 1/2 付きの変数 $\tilde{\psi} = (g)^{1/4}\psi$ などを用いて

$$d\mu \equiv \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}} \mathcal{D}\tilde{\psi} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^N d\bar{b}_n da_n \tag{8.1.9}$$

のように定義すると，経路積分は

$$\int d\mu \exp[S] = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^N d\bar{b}_n da_n \exp[\sum_{n=1}^N (i\lambda_n - m)\bar{b}_n a_n] \tag{8.1.10}$$

で与えられる.

この経路積分で局所化したカイラル変換

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = \exp[i\alpha(x)\gamma_{2n+1}]\psi(x),\\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\exp[i\alpha(x)\gamma_{2n+1}]\end{aligned} \tag{8.1.11}$$

を考えると，次の恒等式が得られる

$$\begin{aligned}&\int d\mu' \exp[S(\psi', \bar{\psi}', e^{\mu}_{k}, A^{a}_{\mu})]\\ &= \int d\mu \exp[S(\psi, \bar{\psi}, e^{\mu}_{k}, A^{a}_{\mu})]\\ &= \int d\mu J(\alpha) \times \exp\{S(\psi, \bar{\psi}, e^{\mu}_{k}, A^{a}_{\mu})\\ &\quad + \int d^{2n}x\sqrt{g}\alpha(x)[D_{\mu}J^{\mu}_{5}(x) - 2im\bar{\psi}\gamma_{2n+1}\psi]\}\end{aligned} \tag{8.1.12}$$

最初の等式は経路積分の値は積分変数の名前の付け方によらないという事実を表し，第一の式から最後の式への変形は，パラメター $\alpha(x)$ が無限小の場合に経路積分の測度でヤコビアンを計算し，作用の中では $\alpha(x)$ のべきに展開した結果を表している．ただし，

$$\begin{aligned}J(\alpha) &= \exp\left[-2i\int d^{2n}x\sqrt{g}\alpha(x)\lim_{N\to\infty}\sum_{l=1}^{N}\varphi^{\dagger}_{l}(x)\gamma_{2n+1}\varphi_{l}(x)\right],\\ J^{\mu}_{5}(x) &\equiv \bar{\psi}(x)e^{\mu}_{k}\gamma^{k}\psi(x)\end{aligned} \tag{8.1.13}$$

である．$J(\alpha) = \exp[-2i\int d^{2n}x\sqrt{g}\alpha(x)\mathcal{A}_{5}(x)]$ と書くと，WT 恒等式は

$$D_{\mu}J^{\mu}_{5}(x) = 2im\bar{\psi}\gamma_{2n+1}\psi(x) + 2i\mathcal{A}_{5}(x) \tag{8.1.14}$$

と書かれる.

したがって $\mathcal{A}_{5}(x)$ の計算を行う必要がある.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{5}(x) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{l=1}^{N}\varphi^{\dagger}_{l}(x)\gamma_{2n+1}\varphi_{l}(x)\\ &= \lim_{M\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi^{\dagger}_{l}(x)\gamma_{2n+1}\exp[-\frac{\lambda^{2}_{l}}{M^{2}}]\varphi_{l}(x)\end{aligned}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l^\dagger(x)\gamma_{2n+1} \exp[-\frac{\not{D}^2}{M^2}]\varphi_l(x)$$
$$\equiv \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}\langle x|\exp[-\frac{\not{D}^2}{M^2}]|x\rangle \tag{8.1.15}$$

のように，平坦な時空間と同様な量子異常のマスター公式が得られる．ただしトレースはスピナーの自由度と Yang-Mills のゲージ自由度にわたる．ここで，次の公式に着目する

$$\begin{aligned}\not{D}^2 &= \gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu \\ &= \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}_+ D_\mu D_\nu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\frac{1}{2}[D_\mu,D_\nu] \\ &= g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][D_\mu,D_\nu]\end{aligned} \tag{8.1.16}$$

さらに任意のスピナー $\varphi_n(x)$ に作用するときには

$$[D_\mu,D_\nu]\varphi_n(x) = \{\frac{-i}{2}\sigma_{mn}R^{mn}_{\ \ \mu\nu} - i\,F_{\mu\nu}\}\varphi_n(x) \tag{8.1.17}$$

が $\sigma^{ab} = (i/4)[\gamma^a,\gamma^b]$ を用いて成立する．ただし，$R^{mn}_{\ \ \mu\nu}$ は Riemann-Christoffel の曲率テンソルである．さらに曲率テンソルの対称性を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\frac{(-i)}{2}\sigma_{mn}R^{mn}_{\ \ \mu\nu} &= \frac{1}{32}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][\gamma_m,\gamma_n]R^{mn}_{\ \ \mu\nu} = \frac{1}{8}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta R^{\alpha\beta}_{\ \ \mu\nu} \\ &= \frac{1}{4}R\end{aligned} \tag{8.1.18}$$

がスカラー曲率 $R$ を用いて成立する．

このようにしてマスター公式は

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_5(x) &= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}\langle x|\exp\left[-\frac{D^\mu D_\mu + \frac{1}{4}R - \sigma^{ab}F_{ab}}{M^2}\right]|x\rangle \\ &= \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}\exp\left[-\frac{D^\mu D_\mu + \frac{1}{4}R - \sigma^{ab}F_{ab}}{M^2}\right]\delta(x,x')|_{x'\to x}\end{aligned} \tag{8.1.19}$$

を与える．ここで $\delta(x,x')$ は曲がった空間への $\delta$ 関数の一般化であり，

$$\delta(x,x') = \frac{1}{\sqrt{g(x')}} \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \exp\left[ik_\mu \partial^\mu \sigma(x,x')\right] \tag{8.1.20}$$

で与えられる．ただし，$\sigma(x,x')$ は測地的な双スカラー(geodesic biscalar)と呼ばれ $\frac{1}{2}(x-x')^2$ の曲がった空間への一般化である．

この量子異常の計算を

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x_0) &= -\delta_{\mu\nu}, \quad \partial_\alpha g_{\mu\nu}(x_0) = 0, \\ e^k_\mu(x_0) &= \delta^k_\mu, \quad \partial_\alpha e^k_\mu(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{8.1.21}$$

を満たすような座標系を選んで，時空が平坦になる点 $x_0$ のまわりで実行する．具体的には

$$x^\mu = x^\mu_0 + y^\mu \tag{8.1.22}$$

と書いて，$y^\mu$ を変数に選んで無限小の $y^\mu$ に対して計算し最後に $y^\mu \to 0$ とする．このときは

$$H(x) \equiv D^\mu D_\mu + \frac{1}{4}R - \sigma^{ab}F_{ab} \tag{8.1.23}$$

を定義すると，マスター公式は

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5(x_0) \;=\; & \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1} \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} \\ & \times \exp\left[-ik_\mu(x^\mu_0 + y^\mu)\right] \exp\left[-\frac{H(x_0+y^\mu)}{M^2}\right] \exp\left[ik_\mu(x^\mu_0+y^\mu)\right] \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

で計算の後に $y^\mu$ を 0 にしたもので与えられる．この計算を実際に実行することは不可能ではないが，ここでは任意の次元での結果を簡潔な式で書くために

$$y^\mu \to \frac{1}{M}y^\mu \tag{8.1.25}$$

と書いて，$M$ を大きくするのと $y^\mu$ を 0 に近づけるのを同時に実行することにする．

このとき計量などを $y^\mu/M$ に関して展開することにより

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\left(x_0 + \frac{1}{M}y^\mu\right) &= g_{\mu\nu}(x_0) + \frac{1}{2!M^2}y^\alpha y^\beta \partial_\alpha\partial_\beta g^{\mu\nu}(x_0) + \cdots \\ A^{mn}_\mu\left(x_0 + \frac{1}{M}y^\mu\right) &= \frac{1}{2M}y^\nu R_{\nu\mu ab} + \cdots \end{aligned} \tag{8.1.26}$$

が得られる．ただし現在の座標系では $\partial_\alpha g_{\mu\nu}(x_0)=0$, $A_\mu^{mn}(x_0)=0$ などが成立することと，最終的な結果には $\mu$ と $\nu$ の足に関して反対称な量のみが寄与すること（対称部分は基本的にはゲージ自由度で除去できる）を先取りして式を簡単化した．このようにして

$$
\begin{aligned}
&H(x_0+\frac{1}{M}y^\mu)/M^2 \\
&\quad=\left[\frac{\partial}{\partial y^\mu}-\frac{i}{4M^2}\sigma^{ab}y^\nu R_{\nu\mu ab}(x_0)-\frac{i}{M}A_\mu^a(x_0+\frac{1}{M}y^\mu)T^a+O(\frac{1}{M^3})\right]^2 \\
&\qquad+\frac{1}{4M^2}R(x_0)-\frac{1}{M^2}\sigma^{ab}F_{ab}(x_0+\frac{1}{M}y^\mu)+O(\frac{1}{M^3})
\end{aligned}
\tag{8.1.27}
$$

が得られる．またマスター公式 (8.1.24) で $k_\mu \to Mk_\mu$ と置き換えることにより量子異常は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_5(x_0) \\
&=\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}M^{2n}\int\frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}}e^{-ik_\mu y^\mu} \\
&\quad\times\exp\left\{-\left[\frac{\partial}{\partial y^\mu}-\frac{i}{4M^2}\sigma^{ab}y^\nu R_{\nu\mu ab}(x_0)\right]^2+\frac{1}{M^2}\sigma^{ab}F_{ab}(x_0)\right\}e^{ik_\mu y^\mu} \\
&=\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}M^{2n} \\
&\quad\times\langle y|\exp\left\{-\left[\frac{\partial}{\partial y^\mu}-\frac{i}{4M^2}\sigma^{ab}y^\nu R_{\nu\mu ab}(x_0)\right]^2+\frac{1}{M^2}\sigma^{ab}F_{ab}(x_0)\right\}|y\rangle
\end{aligned}
\tag{8.1.28}
$$

のように書かれる．この式では，$(1/M)^{2n}$ 以上で $\gamma^a$ を少なくとも $2n$ 個含む項が生き残ることを考慮すると，$\sigma^{ab}/M^2$ の $n$ 乗のみがこの条件を満たすことを用いた．この式を導く過程で多くの項を消去してきたが，これらの項はすべて最終結果を変更しないことが確認できる．

この最終的な量子異常の式で，

$$
R_{\nu\mu}(x_0)\equiv R_{\nu\mu ab}\sigma^{ab},\quad F\equiv F_{ab}\sigma^{ab} \tag{8.1.29}
$$

を定義すると，$R_{\nu\mu}/M^2$ は互いに交換するとして扱ってよいことがわかる．なぜなら，$R_{\nu\mu}/M^2$ の交換関係は $1/M$ のべきを増やすが Dirac の $\gamma$ 行列の数を変化させないからである．同様に，$R_{\nu\mu}/M^2$ と $F/M^2$ も交換するとして扱ってよいことがわかる．したがって，

$$\mathcal{A}_5(x_0) = \lim_{M\to\infty} \mathrm{tr}\, \gamma_{2n+1} M^{2n} \exp\,[\frac{1}{M^2}F]$$
$$\times\langle y|\exp\left\{-\left[\frac{\partial}{\partial y^\mu} - \frac{i}{4M^2}y^\nu R_{\nu\mu}(x_0)\right]^2\right\}|y\rangle \quad (8.1.30)$$

とも書ける．この具体的な計算を第一量子化の経路積分の手法を用いて行うことにする．

## 8.2 経路積分を用いた計算

$y^\mu$ を変数とするハミルトニアン

$$\hat{H}_0 \equiv \left[\frac{\partial}{\partial y^\mu} - \frac{i}{4M^2}y^\nu R_{\nu\mu}(x_0)\right]^2 = \left[i\hat{p}_\mu - \frac{i}{4M^2}y^\nu R_{\nu\mu}(x_0)\right]^2 \quad (8.2.1)$$

を形式的に定義して，次の時間発展の演算子を考えて Legendre 変換をおこない，第一量子化の経路積分

$$\langle y|\exp\,[-\hat{H}_0]|y\rangle$$
$$= N_n \int \mathcal{D}\xi^\mu \mathcal{D}p_\mu \exp\left\{\int_0^1 [ip_\mu(\tau)\dot{\xi}^\mu(\tau) - H_0(p_\mu(\tau), \xi^\mu(\tau))]d\tau\right\}$$
$$(8.2.2)$$

を定義する．ただし規格化の定数 $N_n$ は後に決める．$R_{\nu\mu}(x_0)/M^2$ は交換する定数として扱ってよいことを想起して，運動量に関する経路積分を行うと

$$N_n \int \mathcal{D}\xi^\mu \exp\left\{\frac{1}{4}\int_0^1 [\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}_\mu + \xi^\nu\dot{\xi}_\mu R_{\nu\mu}/M^2]d\tau\right\} \quad (8.2.3)$$

となり，$R_{\nu\mu}$ の反対称な部分のみが寄与することが確かめられる．変数 $\xi^\mu(\tau)$ に対する境界条件 $\xi^\mu(0) = \xi^\mu(1) = y^\mu$ を考慮して完全系 $\{\sqrt{2}\,\sin n\pi\tau\}$ で

$$\xi^\mu(\tau) = y^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n^\mu\sqrt{2}\,\sin 2n\pi\tau + b_n^\mu\sqrt{2}\,\sin\,(2n-1)\pi\tau\} \quad (8.2.4)$$

のように展開する．

このとき経路積分の測度は展開係数の積分で表され

$$N_n \int \prod_{n=1}^{\infty} da_n^\mu db_n^\mu \exp\{\frac{1}{4}\{\sum_{n=1}^{\infty}[(2n\pi)^2(a_n^\mu)^2 + ((2n-1)\pi)^2(b_n^\mu)^2] + \sum_{n,m=1}^{\infty} 2i[(2m-1)\pi]a_n^\nu b_m^\mu A(n,m)R_{\nu\mu}/M^2\}\} \tag{8.2.5}$$

となる．ただし

$$A(n,m) = 2\int_0^1 d\tau \sin 2n\pi\tau \cos{(2m-1)\pi\tau} \tag{8.2.6}$$

を定義した．この経路積分で $b_n^\mu$，つぎに $a_n^\mu$ の順番に積分すると

$$\begin{aligned} & N_n \int \prod_{n=1}^{\infty} da_n^\mu \exp\left\{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}[(2n\pi)^2(a_n^\mu)^2 + a_n^\mu a_n^\nu R_{\mu\alpha}R_\nu{}^\alpha/M^4]\right\} \\ & = N_n \int \prod_{n=1}^{\infty} \det\left|1 - \frac{1}{M^4}\frac{R_\mu{}^\alpha R_\alpha{}^\nu}{(2n\pi)^2}\right|^{-1/2} \\ & = N_n \det|i\hat{R}/(2M^2)/\sinh(i\hat{R}/(2M^2))|^{1/2} \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

のように

$$(\hat{R})_\mu{}^\alpha \equiv \sigma^{ab}R_{ab\mu}{}^\alpha \tag{8.2.8}$$

という行列記法を用いて，直交性

$$\sum_{m=1}^{\infty} A(n,m)A(l,m) = \delta_{n,l} \tag{8.2.9}$$

に注意すると計算される[*1]．規格化の定数は，$R_{\nu\mu}=0$ の場合を考えて

$$\langle y|e^{-\hat{H}_0(R_{\nu\mu}=0)}|y\rangle = \int \frac{d^{2n}k}{(2\pi)^{2n}}e^{k_\mu k^\mu} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n \tag{8.2.10}$$

のように決定され

$$\langle y|\exp{[-\hat{H}_0]}|y\rangle = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n \det|i\hat{R}/(2M^2)/\sinh{(i\hat{R}/(2M^2))}|^{1/2} \tag{8.2.11}$$

のように最終的に求められる．

---

*1　$\sum_{m=1}^{\infty} A(n,m)A(l,m) = 4\sum_{m=0}^{\infty}\int d\tau d\tau' \sin 2n\pi\tau \cos m\pi\tau \sin 2l\pi\tau' \cos m\pi\tau' = \delta_{n,l}$．ただし $\int d\tau \sin 2n\pi\tau \cos 2m\pi\tau = 0$ を用いた．

## 8.3 Chern 指標と Dirac 示性数

前節の計算の結果を用いると，カイラル $U(1)$ 量子異常の計算の結果は

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_5(x) &= \lim_{M\to\infty}\frac{M^{2n}}{(4\pi)^n}\,\mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}\exp\left[\frac{F}{M^2}\right]\det\left|\frac{i\hat{R}/(2M^2)}{\sinh\left(i\hat{R}/(2M^2)\right)}\right|^{1/2}\\ &= \lim_{M\to\infty}\frac{M^{2n}}{(4\pi)^n}\,\mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}\exp\left\{\frac{F}{M^2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\ln\left[\frac{i\hat{R}/(2M^2)}{\sinh\left(i\hat{R}/(2M^2)\right)}\right]\right\}\end{aligned} \tag{8.3.1}$$

のように一般の座標系で書くことができる．ただし全体の式の前に現われるトレースは Dirac 行列および Yang-Mills の添え字にわたり，指数関数の肩の対数の前に現われるトレースは $\hat{R}_\mu{}^\alpha$ の Minkowski の足に関するものを表す．この式で $\exp\,[F/M^2]$ の項は Chern 指標(character)，$\hat{R}$ を含む行列式の部分は Dirac 示性数(genus)と呼ばれ，Dirac 粒子の古典解を用いた式($n_\pm$ は，0 固有値に属して $\gamma_{2n+1}\varphi_n = \pm\varphi_n$ を満たす解の数として)

$$\begin{aligned}\int d^{2n}x\sqrt{g}\mathcal{A}_5(x) &= \int d^{2n}x\sqrt{g}\lim_{M\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_l^\dagger(x)\gamma_{2n+1}\exp\left[-\frac{\lambda_l^2}{M^2}\right]\varphi_l(x)\\ &= n_+ - n_-\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

と組み合わせると，Atiyah-Singer の指数定理の一般化を与える．

ここで

$$F = \sigma^{ab}F_{ab}, \qquad (\hat{R})_\mu{}^\alpha = \sigma^{ab}R_{ab\mu}{}^\alpha \tag{8.3.3}$$

を思い起こして，

$$\sinh x/x = 1 + x^2/3! + x^4/5! + \cdots \tag{8.3.4}$$

を用いて $\sigma^{ab}/M^2$ のべきに展開して，この $n$ 乗の項と $\mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1}$ を組み合わせると最終的な具体形が求められる．$\sinh x/x$ の展開式から重力に関係したカイラル量子異常は $d=4k$, $k=1,2,\cdots$ のように，4 の倍数の次元の時空間においてのみ現われることがわかる．他方ゲージ場 $F$ に関係したカイラル量子異常は任意の偶数次元の時空間で現われることがわかる．例えば 4 次元空間では，(QED 型の理論で)恒等式 (8.1.14) への重力場の寄与は

$$D_\mu J_5^\mu(x) = 2im\bar{\psi}\gamma_{2n+1}\psi(x) - \frac{i}{384\pi^2}\epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}R_{\lambda\rho\mu\nu} \tag{8.3.5}$$

と書かれる．一般に高い次元の時空では，$F$ と $\hat{R}$ の積の項(これは混合した量子異常と呼ばれる)が現われる．

数学的な文献などでは微分形式の記法がよく用いられるが，現在の式を微分形式に変換するには，

$$\gamma^\mu \to dx^\mu, \quad \mathrm{tr}\,\gamma_{2n+1} \to (-i)^n 2^n, \quad 2\pi i/M^2 \to 1 \tag{8.3.6}$$

と置き換えると，トレースは Yang-Mills の自由度にわたるものとして

$$\mathcal{A}_5(x) \;=\; \mathrm{tr}\left\{\exp\left[\frac{F}{2\pi}\right]\det\left|\frac{i\hat{R}/4\pi}{\sinh(i\hat{R}/4\pi)}\right|^{1/2}\right\}\Bigg|_{\mathcal{M}_{2n}} \tag{8.3.7}$$

と書くことができるが，この式で

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (\hat{R})_\mu{}^\nu = \frac{1}{2}R_{\alpha\beta\mu}{}^\nu dx^\alpha dx^\beta \tag{8.3.8}$$

と読み直して $2n$ 形式(2n-form)を取り出すと，$2n$ 次元の時空間の微分形式の表式が得られる．

## 8.4　一般座標変換の量子的な破れ

パリティを破るカイラルなゲージ理論では，ゲージ対称性そのものに量子異常が現われることは第 6 章で説明したが，カイラルな理論では Einstein の一般座標変換そのものにも量子異常が時空間の次元によっては現われうることが Alvarez-Gaume と Witten により指摘され，弦の量子論などにおいて基本的になっている．一般には，カイラルな Dirac 粒子以外にも自己共役なテンソル場などでも重力対称性に量子異常が現われるが，本書では最も簡単な Dirac 粒子に関係した量子異常を議論する．

時空の次元としては，この章でのこれまでの議論と同じ一般の Euclid 的な $2n$ 次元を考え，Dirac 場のみを量子化することにして，重力場とゲージ場は古典的な背景場として扱う．カイラルな理論の作用は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&S = \int d^{2n}x\sqrt{g}\bar{\psi}(x)i\not{D}\left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{2}\right)\psi(x), \\
&\not{D} = e^{\mu}_{k}\gamma^{k}(\partial_\mu - \frac{i}{2}A_{\mu mn}\sigma^{mn} - iA^{a}_{\mu}T^{a}) = \gamma^{\mu}(\partial_\mu - \frac{i}{2}A_{\mu mn}\sigma^{mn} - iA_\mu), \\
&\sqrt{g} = \det e^{k}_{\mu}
\end{aligned}
\tag{8.4.1}
$$

Dirac 場を量子化したときの Einstein の方程式は（付録 B 参照）

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa\langle\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\rangle \tag{8.4.2}
$$

の形に書かれ，$\langle\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\rangle$ は量子化された Dirac 場によるエネルギー運動量テンソルを表す．この $\langle\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\rangle$ は規格化を考えると

$$
\begin{aligned}
\langle\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{g}}e_{k\mu}(x)\frac{\delta}{\delta e^{\nu}_{k}(x)}W(e^{\lambda}_{l}) \\
\exp\,[W(e^{\lambda}_{l})] &\equiv \int \mathcal{D}\bar{\tilde{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi}\exp\,[\int\sqrt{g}(\bar{\psi}ie^{\mu}_{a}\gamma^{a}D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi)d^{4}x]
\end{aligned}
\tag{8.4.3}
$$

で与えられる．

さて，量子化された $\langle\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\rangle$ が持つ対称性の議論をすると，まず局所 Lorentz 変換あるいは一般座標変換の下で作用 $S=\int\sqrt{g}\mathcal{L}d^4x$ は不変なので

$$
S(e^{\lambda}_{l}, \bar{\psi}, \psi) = S(e'^{\lambda}_{l}, \bar{\psi}', \psi') \tag{8.4.4}
$$

が成立することに注意すると

$$
\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\bar{\tilde{\psi}}'\mathcal{D}\tilde{\psi}'\exp\,[S(e'^{\lambda}_{l}, \bar{\tilde{\psi}}', \tilde{\psi}')] &= \int \mathcal{D}\bar{\tilde{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi}\exp\,[S(e'^{\lambda}_{l}, \bar{\tilde{\psi}}, \tilde{\psi})] \\
&= \int \mathcal{D}\bar{\tilde{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi}J\exp\,[S(e^{\lambda}_{l}, \bar{\tilde{\psi}}, \tilde{\psi})]
\end{aligned}
\tag{8.4.5}
$$

という恒等式が得られる．最初の等号は経路積分の値は積分変数の名前の付け方には依らないという事実を表し，最初の式から最後の式への変換は積分の測度でヤコビアンを計算し作用は座標変換の下で不変であるという性質を用いた．この等式で 4 脚場の無限小の変換を $e'^{\lambda}_{l} = e^{\lambda}_{l} + \delta e^{\lambda}_{l}$ と書いて，$\delta e^{\lambda}_{l}$ に関して最低次の項を考えると

$$\int \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi}\left\{\int d^4x\delta e_l^\nu(x)\frac{\delta}{\delta e_l^\nu(x)}S(e_l^\lambda,\tilde{\bar{\psi}},\tilde{\psi})\right\}\exp\left[S(e_l^\lambda,\tilde{\bar{\psi}},\tilde{\psi})\right]$$
$$\equiv \int d^4x\langle\delta e_l^\nu(x)\frac{\delta}{\delta e_l^\nu(x)}S(e_l^\lambda,\tilde{\bar{\psi}},\tilde{\psi})\rangle$$
$$\equiv \int d^4x\sqrt{g}\langle\delta e_l^\nu(x)\tilde{T}^l{}_\nu(x)\rangle$$
$$= \langle \ln J\rangle \tag{8.4.6}$$

という恒等式が得られる．$\tilde{T}^l{}_\nu$ の定義では，$\psi(x)$ ではなく $\tilde{\psi}$ などを固定してから 4 脚場に関して関数微分して定義することに注意して欲しい．

ここで得られた恒等式で，まず局所 Lorentz 変換の下では $\delta e_l^\nu = -\omega_l{}^m e_m^\nu$ であることを想起すると

$$\int d^4x\sqrt{g}\langle e^{m\nu}(x)\omega_{ml}e^{l\mu}(x)\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\rangle = \langle\ln J(\omega)\rangle \tag{8.4.7}$$

が得られる．Lorentz 変換の反対称性 $\omega_{ml} = -\omega_{lm}$ を用い，またヤコビアンが

$$\ln J(\omega) = \int d^{2n}x\sqrt{g}\omega_{ml}(x)\mathcal{A}^{ml} \tag{8.4.8}$$

の形をしているとすると，恒等式は

$$\tilde{T}_{A\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\langle\tilde{T}_{\mu\nu}(x) - \tilde{T}_{\nu\mu}(x)\rangle = -\mathcal{A}_{\mu\nu}(x) \tag{8.4.9}$$

を与える．もし Lorentz 変換に対するヤコビアンすなわち量子異常が 0 でないとすると，Einstein の方程式 (8.4.2) の左辺が対称テンソルであることと量子化されたカイラルな Dirac 場により作り出されるエネルギー運動量テンソルとが矛盾することになる．

つぎに一般座標変換の無限小形は

$$\delta_{\mathrm{GC}}e_l^\lambda(x) = e_l'^\lambda(x) - e_l^\lambda(x) = \xi^\lambda\partial_\lambda e_l^\nu(x) - \partial_\alpha\xi^\nu e_l^\alpha(x) \tag{8.4.10}$$

で与えられるが，エネルギー運動量テンソルは一般には対称でないことを自然に扱うために次の式で定義される座標変換

$$\delta_{\mathrm{cov}}e_k^\mu \equiv \xi^\nu D_\nu e_k^\mu - (D_\nu\xi^\mu)e_k^\nu = -D_k\xi^\mu \tag{8.4.11}$$

を考える．ここで $D_\nu$ は共変微分であり，したがって計量条件 $D_\nu e_k^\mu = 0$ が成立する．すなわち

$$\delta_{\mathrm{cov}} \equiv \delta_{\mathrm{GC}}(\xi^\mu) + \delta_{\mathrm{LL}}(\xi^\mu A_{\mu mn}) \tag{8.4.12}$$

のように，一般座標変換とスピン接続をパラメターに含む局所 Lorentz 変換を組み合わせて考える．このとき上記の恒等式 (8.4.5) は

$$\int d^4x\sqrt{g}\langle(-D_k\xi^\mu)\tilde{T}^k{}_\mu(x)\rangle = \int d^4x\sqrt{g}\langle\xi^\mu D_\nu\tilde{T}^\nu{}_\mu(x)\rangle = \langle J(\xi^\mu)\rangle \tag{8.4.13}$$

を与える．ここでヤコビアンが

$$J(\xi^\mu) = \int d^{2n}x\sqrt{g}\xi^\mu(x)\mathcal{A}_\mu(x) \tag{8.4.14}$$

のような形をしているとすると，$\xi^\mu(x)$ は任意なので

$$D^\nu\langle\tilde{T}_{\nu\mu}(x)\rangle = \mathcal{A}_\mu(x) \tag{8.4.15}$$

が結論される．あるいは，$\tilde{T}_{\nu\mu}(x)$ の反対称成分は Lorentz 変換の恒等式 (8.4.7) を満たすことと組み合わせると，対称な成分 $\tilde{T}_{S\nu\mu}(x)$ は

$$D^\nu\langle\tilde{T}_{S\nu\mu}(x)\rangle = -D^\nu\langle\tilde{T}_{A\nu\mu}(x)\rangle + \mathcal{A}_\mu(x) = D^\nu\mathcal{A}_{\nu\mu} + \mathcal{A}_\mu(x) \tag{8.4.16}$$

を満たす．この式は，一般座標変換の WT 恒等式と呼ばれる．もし (8.4.16) の右辺の量子異常が 0 でないとすると，Einstein の方程式の左辺が

$$D^\mu(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0 \tag{8.4.17}$$

という恒等式を満たすこと((B.1.32)参照)を思い起こすと，Einstein の方程式はカイラルな Dirac 場を量子化すると矛盾することになる．

## 8.5　座標変換に関する量子異常の一般的な性質

第 6 章の共変量子異常の計算方法では，経路積分の測度を定義するために $\not{D}_L = \not{D}(1-\gamma_{2n+1})/2$ として，$\not{D}_L^\dagger\not{D}_L$ と $\not{D}_L\not{D}_L^\dagger$ の完全系を定義して $\tilde{\psi}$ および $\tilde{\bar{\psi}}$ を展開して議論した．

これと同等なもう少し直接的な展開法は

$$\not{D}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x), \quad \int\sqrt{g}\varphi_n^\dagger(x)\varphi_m(x) = \delta_{n,m} \tag{8.5.1}$$

を定義して

$$\begin{aligned}&\not{D}\gamma_{2n+1}\varphi_n(x) = -\lambda_n\gamma_{2n+1}\varphi_n(x) \equiv -\lambda_n\varphi_{-n}(x), \quad \text{for} \quad \lambda_n \neq 0,\\&\gamma_{2n+1}\varphi_n = \pm\varphi_n, \quad \text{for} \quad \lambda_n = 0\end{aligned} \tag{8.5.2}$$

に注意して

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_L(x) &\equiv \left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{2}\right)\tilde{\psi}(x)\\&= \sum_{\lambda_n>0} a_n \left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)(g)^{1/4}\varphi_n(x)\\&\quad + \sum_{\lambda_n=0} a_n \left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{2}\right)(g)^{1/4}\varphi_n(x),\\\bar{\tilde{\psi}}_L(x) &\equiv \bar{\tilde{\psi}}\left(\frac{1+\gamma_{2n+1}}{2}\right)\\&= \sum_{\lambda_n>0} \bar{b}_n\varphi_n^\dagger(x)(g)^{1/4}\left(\frac{1+\gamma_{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)\\&\quad + \sum_{\lambda_n=0} \bar{b}_n\varphi_n^\dagger(x)(g)^{1/4}\left(\frac{1+\gamma_{2n+1}}{2}\right)\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

のように展開して得られる．このとき経路積分は形式的に対角化され

$$\int \mathcal{D}\bar{\tilde{\psi}}_L\mathcal{D}\tilde{\psi}_L \exp[S] = \lim_{N\to\infty}\int \prod_{\lambda_n\geq 0}^{N} d\bar{b}_n \prod_{\lambda_n\geq 0}^{N} da_n \exp\left[\sum_{\lambda_n>0}^{N}\bar{b}_n a_n i\lambda_n\right] \tag{8.5.4}$$

と書かれる．ただし，ヤコビアンとして現れる位相因子は省略した．

局所 Lorentz 変換

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\psi}(x) &= \frac{i}{2}\omega_{mn}(x)\sigma^{mn}\tilde{\psi}(x),\\\delta\bar{\tilde{\psi}}(x) &= \bar{\tilde{\psi}}(x)\frac{(-i)}{2}\omega_{mn}(x)\sigma^{mn}\end{aligned} \tag{8.5.5}$$

に対するヤコビアンは

$$\begin{aligned}\ln J(\omega) = -\int d^{2n}x\sqrt{g}\Bigg\{&\sum_{\lambda_n>0}\varphi_n^\dagger\left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)\frac{i}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}\left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)\varphi_n\\&+\sum_{\lambda_n=0}\varphi_n^\dagger\left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{2}\right)\frac{i}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}\left(\frac{1-\gamma_{2n+1}}{2}\right)\varphi_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\lambda_n>0}\varphi_n^\dagger\Big(\frac{1+\gamma_{2n+1}}{\sqrt{2}}\Big)\frac{i}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}\Big(\frac{1+\gamma_{2n+1}}{\sqrt{2}}\Big)\varphi_n \\
&-\sum_{\lambda_n=0}\varphi_n^\dagger\Big(\frac{1+\gamma_{2n+1}}{2}\Big)\frac{i}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}\Big(\frac{1+\gamma_{2n+1}}{2}\Big)\varphi_n \Bigg\} \\
=& \int d^{2n}x\sqrt{g}\sum_n \varphi_n^\dagger\frac{i}{2}\omega_{mn}\sigma^{mn}\gamma_{2n+1}\varphi_n(x)
\end{aligned}
\tag{8.5.6}
$$

で与えられる．この最後の式ではすべての正負および 0 の固有値に対する和をとるものとする．

同様に一般座標変換（$\tilde{D}_\mu=(g)^{1/4}D_\mu(g)^{-1/4}$ を定義して）

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{cov}}\tilde{\psi}(x) &= \xi^\mu\tilde{D}_\mu\tilde{\psi}(x)+\frac{1}{2}(D_\mu\xi^\mu)\tilde{\psi}(x), \\
\delta_{\mathrm{cov}}\tilde{\bar{\psi}}(x) &= \xi^\mu\tilde{D}_\mu\tilde{\bar{\psi}}(x)+\frac{1}{2}(D_\mu\xi^\mu)\tilde{\bar{\psi}}(x)
\end{aligned}
\tag{8.5.7}
$$

のヤコビアンを計算すると

$$
\begin{aligned}
&\ln J(\xi) \\
&=\int d^{2nx}\sqrt{g}\xi^\mu(x)\frac{1}{2}\sum_n\{\varphi_n^\dagger(x)\gamma_{2n+1}D_\mu\varphi_n(x)-(D_\mu\varphi_n)^\dagger(x)\gamma_{2n+1}\varphi_n(x)\}
\end{aligned}
\tag{8.5.8}
$$

が得られる．この最後の式でも和はすべての固有値にわたる．この式で特徴的なことは，重み付きの変数 $\tilde{\psi}=(g)^{1/4}\psi$ を積分変数に選んだために $\gamma_{2n+1}$ を含まない“見かけ上の量子異常”は全微分を与え，自動的に取り除かれていることである．

このようにして，局所 Lorentz 変換および一般座標変換に対する量子異常はそれぞれ（正則化の関数を $e^{-x}$ に選んで）

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{mn}(x) &= \lim_{M\to\infty}\sum_n^\infty \varphi_n^\dagger\frac{i}{2}\sigma^{mn}\gamma_{2n+1}e^{-\lambda_n^2/M^2}\varphi_n(x), \\
\mathcal{A}_\mu(x) &= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\sum_n^\infty \\
&\quad\times[\varphi_n^\dagger(x)\gamma_{2n+1}D_\mu e^{-\lambda_n^2/M^2}\varphi_n(x)-(D_\mu\varphi_n)^\dagger(x)\gamma_{2n+1}e^{-\lambda_n^2/M^2}\varphi_n(x)]
\end{aligned}
\tag{8.5.9}
$$

で与えられる．

これらの 2 つの量子異常は次のように関係している（正則化の因子を陽に書くのを省略して，$\not{D}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ に注意すると）

$$
\begin{aligned}
&D^\mu \mathcal{A}_{\mu\nu} \\
&\quad \equiv D^\mu [e_{a\mu} e_{b\nu} \mathcal{A}^{ab}] \\
&\quad = \frac{i}{2} \sum_n [(D^\mu \varphi_n)^\dagger \gamma_{2n+1} \sigma_{\mu\nu} \varphi_n + \varphi_n^\dagger \gamma_{2n+1} \sigma_{\mu\nu} D^\mu \varphi_n] \\
&\quad = \frac{(-1)}{4} \sum_n [(D^\mu \varphi_n)^\dagger \gamma_{2n+1} (\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu}) \varphi_n + \varphi_n^\dagger \gamma_{2n+1} (g_{\nu\mu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) D^\mu \varphi_n] \\
&\quad = \frac{(-1)}{4} \sum_n [(\not{D}\varphi_n)^\dagger \gamma_{2n+1} \gamma_\nu \varphi_n - (D_\nu \varphi_n)^\dagger \gamma_{2n+1} \varphi_n \\
&\qquad + \varphi_n^\dagger \gamma_{2n+1} D^\nu \varphi_n - \varphi_n^\dagger \gamma_{2n+1} \gamma_\nu \not{D} \varphi_n] \\
&\quad = \frac{(-1)}{4} \sum_n [\varphi_n^\dagger \gamma_{2n+1} D^\nu \varphi_n - (D_\nu \varphi_n)^\dagger \gamma_{2n+1} \varphi_n] \\
&\quad = -\frac{1}{2} \mathcal{A}_\nu
\end{aligned} \tag{8.5.10}
$$

したがって，Dirac 場に関しては，局所 Lorentz 量子異常が存在し，それが計算できれば一般座標変換に関する量子異常が自動的に計算できることになる．

また局所 Lorentz 量子異常は一般に $d = 4k + 2$ 次元の時空間にのみ存在できることが知られているが，この事実は $d = 4k + 2$ 次元の時空間を特別な場合として $d = 2$ 次元と $d = 4k$ 次元の空間の直積

$$
\mathcal{M}_{4k+2} = \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_{4k} \tag{8.5.11}
$$

に分解すると理解できる．このとき (8.5.9) で $\mathcal{A}^{12}$ を考えると

$$
\sigma^{12} \gamma_{2n+1} \sim \gamma^3 \cdots \gamma^{2n} \sim 1 \times \gamma_{2(n-1)+1} \tag{8.5.12}
$$

に注意すれば，$\mathcal{A}^{12}$ が 2 次元の 1 で表される Weyl 変換と残りの $2(n-1)$ 次元の重力的なカイラル $U(1)$ 量子異常の積で表されることを示している．Weyl 量子異常は第 7 章 6 節で共形変換の議論のときに説明したように 2 次元の時空で存在し，8 章の第 3 節で示したように重力的なカイラル $U(1)$ 量子異常は $d = 4k$ 次元の時空でのみ存在できる．したがって，（少し直感的な議論になるが）局所 Lorentz 量子異常は $d = 4k + 2$ 次元の時空間でのみ現われることがわかる．

## 8.6 重力的な量子異常の具体例

まず重力理論としては自明(trivial)な例になるが，2 次元の時空を考えると，局所 Lorentz 量子異常は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{mn}(x) &= \lim_{M\to\infty}\sum_n^{\infty}\varphi_n^{\dagger}\frac{i}{2}\sigma^{mn}\gamma_3 e^{-\lambda_n^2/M^2}\varphi_n(x) \\
&= \frac{-i}{4}\epsilon^{mn}\lim_{M\to\infty}\sum_n^{\infty}\varphi_n^{\dagger}e^{-\not{D}^2/M^2}\varphi_n(x)
\end{aligned}
\tag{8.6.1}
$$

で与えられ，この計算は第 7 章で議論した 2 次元時空での Weyl 量子異常に $(-i/4)\epsilon^{mn}$ を乗じたものに一致する．第 7 章 6 節の結果を用いて，さらに Lorentz 量子異常と一般座標変換の量子異常の関係 (8.5.10) を思い起こすと

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{\mu\nu}(x) = \frac{-i}{4\pi}\frac{R}{24}\epsilon^{\mu\nu}, \\
&\mathcal{A}^{\nu}(x) = -2D_\mu\mathcal{A}^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\frac{\sqrt{g}R}{24}\epsilon^{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{8.6.2}
$$

が得られる．ただし，$\gamma_3 = -i\gamma^1\gamma^2$ および $\epsilon^{12} = 1$ を用いた．

一般の次元では，例えば熱核法(heat kernel)の手法で計算できるが，実際の計算は非常に複雑である．ただし，一般座標変換に関する量子異常に関しては，一般の次元での計算法が知られている．これは前節で求めた量子異常の公式 (8.5.8) を

$$
\begin{aligned}
&\int d^{2n}x\sqrt{g}\xi^\mu\mathcal{A}_\mu(x) \\
&\quad = \int d^{2n}x\sqrt{g}\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\langle x|\gamma_{2n+1}(\xi^\mu D_\mu + D_\mu\xi^\mu)e^{-\not{D}^2/M^2}|x\rangle
\end{aligned}
\tag{8.6.3}
$$

の形に書いて，この式の考察から導かれる次のルールに基づいている．

この式で $\gamma_{2n+1}$ は $d = 2n = 4k+2$ 次元の時空でのものであるが，形式的に 2 次元上の $d = 2n+2 = 4k+4$ 次元の $\gamma_{2n+3}$ に $\sigma^{mn}$ が掛かったものと見なし，$\xi^\mu$ をこの余分な次元に関係したスピン接続と見なすというのが基本的な考えで

ある．詳細は省略するが，この章の第 3 節で導いた重力的なカイラル $U(1)$ 量子異常を $4k+4$ 次元の時空で微分形式で書いた式

$$\mathcal{A}_5(x) \;=\; \mathrm{tr}\left\{\exp\left[\frac{F}{2\pi}\right]\det\left|\frac{i\hat{R}/4\pi}{\sinh(i\hat{R}/4\pi)}\right|^{1/2}\right\}\Bigg|_{\mathcal{M}_{4k+4}} \tag{8.6.4}$$

において $(\hat{R})_\mu{}^\nu$ の中に現われる $\hat{A}_\mu = \dfrac{1}{2}A_{\mu ab}dx^a dx^b$ について

$$\hat{A}_\mu = \frac{1}{2}A_{\mu ab}dx^a dx^b \to \hat{A}_\mu + \xi^\mu \tag{8.6.5}$$

という置き換えをし，さらに $\xi^\mu$ に関して 1 次の項を取り出し全体として $-2\pi i$ を乗じると，最終的に $\xi^\mu \mathcal{A}_\mu(x)$ が得られるというものである．この計算法からも座標変換の量子異常は $d = 4k+2$ 次元の時空にのみ現われうることがわかる(この導き方からわかるように，重力場とゲージ場が混合した量子異常はもう少し一般の高い $2n$ 次元の理論に現われうる)．

重力的な量子異常が現われると，量子力学の原理と一般相対性理論の原理が矛盾することになるので，理論に現われる種々の場の間での量子異常の相殺を考える必要がある．この相殺の議論では，一般座標変換に関係した量子異常が相殺されておれば残りの Lorentz 異常は見かけ上のものであり，局所的な相殺項で相殺できることが知られている．このルールの直感的な理解は，例えば，重力理論で最初から局所 Lorentz 変換の自由度を固定して取り除き，代わりに一般座標変換を非線形な表現で扱うことが(摂動論的には)可能であるという事実に注目する方法がある．このときには，原理的には一般座標変換しか扱わないので，上記のルールが得られるわけである．なお，共形量子異常の考えで重力的な量子異常が現われるということは，すべて共変的に定義できると想定して定式化した経路積分がそうなっていないという意味でも，相殺されないと量子論として矛盾することがわかる．

重力的な量子異常の応用としては，Einstein の一般座標変換すらも理論によっては量子効果で壊れうるという事実に加えて，$10(=4\times2+2)$ 次元の時空間で定義されている超弦理論の量子的な整合性に対する制約が重要である．重力的な量子異常が相殺され現われない(したがって重力理論と矛盾しない)超弦理論

が存在するという事実を示す議論において，また矛盾のない超弦理論をすべて数え上げる議論においても重要な役割を果たした．

# 9 格子ゲージ理論における指数定理とカイラル量子異常

最近格子ゲージ理論において Dirac 粒子の扱いに大きな進歩があり，量子異常の扱いも連続理論に準じて行えるようになった．とくに格子上においても指数定理が存在することが指摘された．もっとも格子のような離散的な空間での指数定理は微妙な側面もあるが，他方，格子理論は完全に有限に正則化されているために，連続理論では微妙であった取り扱いがよりすっきりする側面もある．これから説明するように，連続理論の経路積分におけるわれわれの量子異常の扱いは格子理論およびその連続極限ですべて再現され，この意味で連続理論と格子理論の整合性が示される．

## 9.1 格子ゲージ理論

まず格子ゲージ理論の基礎的な側面を簡単に復習したい．格子としては 4 次元 Euclid 空間における格子間隔 $a$ の超立方格子(heypercubic lattice)を考える．ゲージ場(接続)は図 9.1 のように，4 次元空間の隣接する格子点 $\hat{n}$ と $\hat{n}+a\hat{\mu}$ を結ぶ $\hat{\mu}$ 方向のリンク(link)と呼ばれる線上で群(例えば以下では $SU(n)$ を考える)に値をもつ変数

$$U_\mu(\hat{n}) = e^{iagA_\mu(\hat{n})} = e^{iagA_\mu^b(\hat{n})T^b} \tag{9.1.1}$$

で定義される．ここで，$\hat{\mu}$ は格子上の $\mu$ 方向へ向かう単位ベクトル，$T^b$ は群 $SU(n)$ の生成演算子

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{9.1.2}$$

であり，$g$ はゲージ結合定数である．また

$$U_{-\mu}(\hat{n}+a\hat{\mu}) = U_\mu(\hat{n})^\dagger \tag{9.1.3}$$

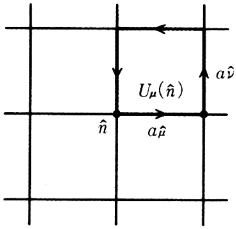



**図 9.1**　$\hat{\mu}-\hat{\nu}$ 面での最小 4 角形

と定義し，ゲージ変換の変換則を

$$U_\mu(\hat{n}) \to U(\omega(\hat{n}))U_\mu(\hat{n})U(\omega(\hat{n}+a\hat{\mu}))^\dagger \tag{9.1.4}$$

で定める．

図 9.1 に $\hat{\mu}-\hat{\nu}$ 面で切った最小 4 角形(plaquette)$P_{\mu\nu}$ を示す．格子ゲージ理論の作用は，tr をゲージ自由度の添え字についてのトレースとして

$$S = \frac{1}{2}\sum_{P_{\mu\nu}}\frac{1}{g^2}\{\mathrm{tr}\,[U_\mu(\hat{n})U_\nu(\hat{n}+a\hat{\mu})U_{-\mu}(\hat{n}+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U_{-\nu}(\hat{n}+a\hat{\nu})] \\ +\mathrm{h.c.}-2\} \tag{9.1.5}$$

で定義される．すなわち，図 9.1 の 4 角形の辺に上記のゲージ場 $U_\mu(\hat{n})$ をリンクの向きも考慮して掛け合わせ，その結果を格子上のすべての可能な $P_{\mu\nu}$ に関して足し合わせたもので作用が定義される．この作用は，ゲージ変換に関して不変であることが確かめられる．

格子間隔 $a$ が小さくなった極限では，

$$\begin{aligned} U_\nu(\hat{n}+a\hat{\mu}) &= \exp\,[iagA_\nu(\hat{n}+a\hat{\mu})] \simeq \exp\,[iagA_\nu(\hat{n})+ia^2g\partial_\mu A_\nu(\hat{n})], \\ U_{-\mu}(\hat{n}+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}) &= U_\mu(\hat{n}+a\hat{\nu})^{-1} \simeq \exp\,[-iagA_\mu(\hat{n})-ia^2g\partial_\nu A_\mu(\hat{n})], \\ U_{-\nu}(\hat{n}+a\hat{\nu}) &= U_\nu(\hat{n})^{-1} = \exp\,[-iagA_\nu(\hat{n})] \end{aligned} \tag{9.1.6}$$

となることを用いると，作用に現れるトレースの項は

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\,\{\exp\,[iagA_\mu(\hat{n})]\exp\,[iagA_\nu(\hat{n})+ia^2g\partial_\mu A_\nu(\hat{n})] \\ &\quad\times\exp\,[-iagA_\mu(\hat{n})-ia^2g\partial_\nu A_\mu(\hat{n})]\exp\,[-iagA_\nu(\hat{n})]\} \\ &\simeq \mathrm{tr}\exp\,\{ia^2g(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+ig[A_\mu,A_\nu])\} \end{aligned} \tag{9.1.7}$$

を与える．したがって**古典的な連続極限** $a \to 0$ で上記の格子ゲージ理論の作用は

$$S = -\frac{1}{2}\sum_{P_{\mu\nu}} a^4 \operatorname{tr}(F_{\mu\nu})^2 \simeq -\frac{1}{2}\int d^4x \operatorname{tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{9.1.8}$$

となり，連続理論の Yang–Mills の作用が再現される．すなわち，格子ゲージ理論は連続無限自由度の Yang–Mills 理論の作用を各リンク上に有限自由度を持つ理論で近似し，理論の正則化を与えている．この正則化は明らかにゲージ自由度を保っている．しかし，4 次元 Euclid 空間の回転の自由度は有限な $a$ に対しては壊している．

格子ゲージ理論の量子化は

$$\int \prod_{\mu} dU_\mu \exp[S] \equiv \int \mathcal{D}U \exp[S] \tag{9.1.9}$$

で与えられる．ここで積分はすべてのリンク変数 $U_\mu$ にわたり，積分の測度はゲージ不変 Haar 測度で次の規則を満たすように定義される

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}U = 1,\\ &\int \mathcal{D}U f(U_0U_\mu) = \int \mathcal{D}(U_0U) f(U_0U_\mu) = \int \mathcal{D}U f(U_\mu)\end{aligned} \tag{9.1.10}$$

ただし，$f(U_\mu)$ は $U_\mu$ の任意の関数であり，$U_0 \in SU(n)$ は任意のゲージ変換である．$U_\mu U_\mu^\dagger = 1$ なので，ゲージ場全体の体積は $\int dU = 1$ のように 1 に規格化されるわけである．すなわち格子ゲージ理論はコンパクトなゲージ理論（compact gauge theory）を与える．この理由で，格子ゲージ理論はゲージ固定をしなくても経路積分は発散せず，定義できることになる．この積分の規則から，例えば群 $SU(3)$ に対しては

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}U (U_\mu)_{ij} = 0,\\ &\int \mathcal{D}U (U_\mu)_{ij}(U_\nu^\dagger)_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{jk}\delta_{il}\delta_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{9.1.11}$$

が導かれる．最初の式は，$(U_\mu)_{ij}$ の群 $SU(3)$ の足 $i, j$ に関して，それぞれ $\mathbf{3}$ と $\mathbf{3}^*$ の表現で独立なゲージ変換を作用させても積分値は変化しないことから，積

分は 0 であることがわかる．第二の積分は，直感的には $j=k$ として $j$ に関して足し上げることにより，正しいことがわかる．

## 9.2　格子上の Dirac 粒子と種の倍増

さて，Dirac 粒子(クォーク)は各格子点に位置しているものとして，差分を使った次の作用により定義される

$$
\begin{aligned}
S_F \equiv a^4 \sum_x \{ & \sum_\mu \left(\frac{i}{2a}\right)[\bar\psi(x)\gamma^\mu U_\mu(x)\psi(x+a^\mu) - \bar\psi(x+a^\mu)\gamma^\mu U_\mu(x)^\dagger\psi(x)] \\
& -m_0\bar\psi(x)\psi(x) \\
& +\sum_\mu \left(\frac{r}{2a}\right)[\bar\psi(x)U_\mu(x)\psi(x+a^\mu) + \bar\psi(x+a^\mu)U_\mu(x)^\dagger\psi(x) - 2\bar\psi(x)\psi(x)]\}
\end{aligned}
\tag{9.2.1}
$$

ここで，$x$ に関する和は格子上のすべての点にわたるものとする．また $a^\mu = a\hat\mu$ とし，$\mu=1$ から $\mu=4$ までの和をとる．最後の $r$ に比例する項は Wilson 項と呼ばれており，この項の意味は後で説明する．計量の規約は

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} = -2\delta^{\mu\nu}, \quad (\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu$$

に選ぶ．この作用は，ゲージ場のゲージ変換(9.1.4)と同時に

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &\to U(\omega(x))\psi(x), \\
\bar\psi(x) &\to \bar\psi(x)U(\omega(x))^\dagger
\end{aligned}
\tag{9.2.2}
$$

の変換を行えばゲージ不変になる．

つぎに，$a$ が小さいときには

$$
\begin{aligned}
U_\mu(x) &= \exp[iagA_\mu^a T^a] \simeq 1 + iagA_\mu(x) + \frac{1}{2}(iagA_\mu)^2, \\
\psi(x+a^\mu) &\simeq \psi(x) + a\partial_\mu\psi(x) + \frac{1}{2}a^2\partial_\mu^2\psi(x)
\end{aligned}
\tag{9.2.3}
$$

となることを用いると，上記の Dirac 粒子の作用は素朴な連続極限 $a\to 0$ では

$$
\begin{aligned}
S_F \simeq \int d^4x \Big\{ & \frac{i}{2}[\bar\psi(x)\gamma^\mu D_\mu(x)\psi(x) - D_\mu\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)] - m_0\bar\psi(x)\psi(x) \\
& - \left(\frac{ar}{4}\right)[\bar\psi(x)D_\mu(x)D^\mu\psi(x) + (D_\mu D^\mu\bar\psi(x))\psi(x)]\Big\}
\end{aligned}
\tag{9.2.4}
$$

を与える．ただし，共変微分は次式で定義する

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu. \tag{9.2.5}$$

素朴な連続極限 $a \to 0$ では，$r$ に比例する Wilson 項は 0 になるが，この項の意味を明らかにするために，有限な $a$ に対する格子の作用 (9.2.1) に帰って，$r=0,\ U_\mu=1$ とおいた自由な Dirac 粒子を考える．

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{k_\mu} e^{-ik_\mu x^\mu}\psi(k),\\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{k_\mu} e^{ik_\mu x^\mu}\bar{\psi}(k)\end{aligned} \tag{9.2.6}$$

のように Fourier 変換して，作用を

$$S_F = \sum_k \{\sum_\mu [\bar{\psi}(k)[\left(\frac{i}{2a}\right)(\gamma^\mu e^{-iak_\mu} - \gamma^\mu e^{iak_\mu}) - m_0]\psi(k)]\} \tag{9.2.7}$$

のように書く．この運動量表示のラグランジアンで $\bar{\psi}(k)$ と $\psi(k)$ に囲まれた項の逆として Dirac 粒子の伝播関数は

$$[\sum_\mu \frac{1}{a}\gamma^\mu \sin ak_\mu - m_0]^{-1} \tag{9.2.8}$$

で与えられる．

格子をなす物体を扱う物性論で知られているように，格子上の理論では，運動量は**基本的 Brillouin 域**で定義され

$$-\frac{\pi}{2a} \leqq k_\mu < \frac{3\pi}{2a} \tag{9.2.9}$$

のように各 $\mu$ で指定される 4 つの成分それぞれに対して選ぶことができる．上記の Dirac 粒子の伝播関数 (9.2.8) ですべての運動量成分 $k_\mu$ を固定しておいて，$a \to 0$ の極限を考えると

$$[\gamma^\mu k_\mu - m_0]^{-1} \tag{9.2.10}$$

のように通常の連続理論の質量 $m_0$ の Dirac 粒子の伝播関数が得られる．ところがこれ以外にも，例えば，運動量の第 1 成分 $k_1$ を $k_1 = \pi/a + k_1'$ に選んで，$k_1'$ およびその他の成分 $k_\mu$ を固定して，$a \to 0$ とすると

$$[\sum_{\mu=2}^{4}\gamma^\mu k_\mu - \gamma^1 k_1' - m_0]^{-1} \tag{9.2.11}$$

となる．運動量の成分は連続極限では $-\infty$ と $\infty$ の間を走ることを考えると，この伝播関数も通常の質量 $m_0$ の Dirac 粒子の伝播を表す．すなわち，1 個の Fermi 粒子を表す目的で導入した格子 Dirac 粒子の作用は，(Minkowski 計量で書くと)実は各運動量成分の方向に 2 個の物理的な粒子を運んでいることになる．4 次元空間では合計 $2^4=16$ 個の Dirac 粒子が現れることになる．この現象は**種の倍増**(species doubling)と呼ばれる．

他方，$r\neq 0$ として Wilson 項を残すと，格子理論の Dirac 粒子の伝播関数は

$$[\sum_\mu \frac{1}{a}\gamma^\mu \sin ak_\mu - m_0 - \sum_\mu \frac{r}{a}(1-\cos ak_\mu)]^{-1} \tag{9.2.12}$$

となり，この式はすべての運動量 $k_\mu$ を固定して $a\to 0$ とした場合のみ通常の質量 $m_0$ の Dirac 粒子の伝播を表す．その他の運動量領域では質量が $m_0+r/a$ の大きさの粒子，すなわち連続極限では無限大の質量を持つことになり，余分な粒子は物理的な Hilbert 空間からは取り除かれ，種の倍増の問題は解決される．

種の倍増を対称性という観点から考察すると，次のようになる．まず，Wilson 項を $r=0$ として無視した格子 Dirac 粒子の作用

$$\begin{aligned} S_F \;\equiv\; & a^4\sum_x \{\sum_\mu \left(\frac{i}{2a}\right)[\bar\psi(x)\gamma^\mu U_\mu(x)\psi(x+a^\mu)-\bar\psi(x+a^\mu)\gamma^\mu U_\mu(x)^\dagger\psi(x)] \\ & -m_0\bar\psi(x)\psi(x)\} \end{aligned} \tag{9.2.13}$$

は，$\alpha$ を定数として，Dirac 粒子のカイラル変換

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{i\alpha\gamma_5}\psi, \\ \bar\psi' &= \bar\psi e^{i\alpha\gamma_5} \end{aligned} \tag{9.2.14}$$

の下で，もし $m_0=0$ であれば，不変であることが確かめられる．上記の作用(9.2.13)はまた Dirac 粒子の場の変数変換

$$\begin{aligned} \psi' &= \mathcal{T}_n\psi, \\ \bar\psi' &= \bar\psi\mathcal{T}_n^{-1} \end{aligned} \tag{9.2.15}$$

の下でも不変であることが確かめられる．ここで $\mathcal{T}_n$ は次の 16 個の演算子

$$1,\ T_1T_2,\ T_1T_3,\ T_1T_4,\ T_2T_3,\ T_2T_4,\ T_3T_4,\ T_1T_2T_3T_4 \tag{9.2.16}$$

および

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_1T_2T_3,\ T_2T_3T_4,\ T_3T_4T_1,\ T_4T_1T_2 \tag{9.2.17}$$

のうちの 1 つである．$T_\mu$ は $\mu = 1 \sim 4$ に対して

$$T_\mu \equiv \gamma_\mu \gamma_5 \exp\left(-i\pi x^\mu / a\right) \tag{9.2.18}$$

で定義され，次の関係式を満たす

$$T_\mu T_\nu + T_\nu T_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{9.2.19}$$

この性質を用いると，$T_\mu$ から上記の 16 個の独立な演算子が構成できることがわかる．現在の Euclid 理論の反エルミート的な $\gamma_\mu$ に対しては

$$T_\mu^\dagger = T_\mu = T_\mu^{-1} \tag{9.2.20}$$

の性質がある．これらの 16 個の演算子を $\mathcal{T}_n, n = 0 \sim 15$, と書き，とくに $\mathcal{T}_0 = 1$ とする．$T_\mu$ は Dirac 粒子の運動量 $k_\mu$ に $\pi/a$ を付け加えることに注意すると，次の運動量領域

$$-\frac{\pi}{2a} \leqq k_\mu < \frac{\pi}{2a} \tag{9.2.21}$$

から出発して，$\mathcal{T}_n$ を用いた演算 (9.2.15) と組み合わせると全基本 Brillouin 域 (9.2.9) を覆うことができる．

$\mathcal{T}_n$ の重要な性質は，(9.2.16) の 8 つの演算子が $\gamma_5$ と交換し，他方 (9.2.17) の 8 つの演算子が $\gamma_5$ と反交換し，したがってカイラル ($\gamma_5$) 荷電の符号を変えることである．このため，$r = 0$ とした Dirac 粒子の理論で量子異常を計算すると 8 個の種の倍増に関係した粒子はプラス符号で量子異常を出し，他の 8 個の種の倍増に関係した粒子はマイナス符号の量子異常を出す．このようにして，素朴な格子化された Dirac 粒子の理論では量子異常は 0 になる．

換言すれば，格子理論のように有限な自由度に正則化して発散を除いた理論では，量子異常を出す機構はなくなると考えられる．量子異常は一般に除去不可能であるという性質と矛盾しないためには，理論そのものが自己調整し，量子異常を出さないような理論になっていると考えられる．すなわちすべてのカイラル荷電を足すと 0 になる，すなわち

$$\sum_{n=0}^{15} (-1)^n \gamma_5 = 0 \tag{9.2.22}$$

のように，15 個の種の倍増が作り出されていると解釈できる．このことから，カイラル対称性を保ちながら連続理論での微分を差分に素朴に置き換える操作

では，格子正則化するのは一般に難しい．すなわち素朴な離散化では種の倍増は避けることはできない．このことは，Nielsen–二宮の定理として知られている．

この観点から，$r \neq 0$ として Wilson 項を残した格子上の Dirac 粒子の作用では，通常のカイラル対称性は Wilson 項により壊されている．これは，Wilson 項は質量無限大の一般化された質量項(これはカイラル対称性を破る)と見なされることからも理解できる．Wilson 項を残した Dirac 粒子の作用を用いると，連続極限で 1 個の物理的な Dirac 粒子に対応した量子異常が正しくでることが知られている．

最近の発展は，次節以下で説明するように素朴な離散化を超えた構成によりもたらされた．

## 9.3　Ginsparg–Wilson 代数の有限次元の表現

まず格子上の Dirac 粒子の作用を一般的に

$$S_F = a^4 \sum_x \sum_y \bar{\psi}(x) D(x,y) \psi(y) \tag{9.3.1}$$

と書くことにする．ただし，$D(x,y)$ は一般にゲージ場を含んでいる．ここで和は格子上のすべての格子点にわたるものとする．ここに現れる Dirac 粒子の演算子 $D(x,y)$ は一般に超局所的(ultra-local)ではない．すなわち，一般に $x^\mu$ と $y^\mu$ が格子点上で離れたところでも値を持つ．しかし，2 点間の距離 $|x-y|$ が大きくなれば，指数関数的に減衰するもの

$$D(x,y) \sim e^{-|x-y|/a} \tag{9.3.2}$$

とする．$\gamma_5$ はエルミートな Dirac 行列とするとき，上記の演算子 $D(x,y)$ は $x^\mu$ と $y^\nu$ で行と列が指定される行列式とみなして

$$(\gamma_5 D)^\dagger = D^\dagger \gamma_5 = \gamma_5 D \tag{9.3.3}$$

というエルミート性を満たすものとする．格子理論では，演算子 $D$ は連続理論でいえば Dirac の運動量の項と(一般化された)質量項の両方を含んだものになっており，Euclid 理論では，このように $\gamma_5$ 行列を掛けて初めてエルミート演算子になる．

最近の格子ゲージ理論の進歩は，**Ginsparg–Wilson の関係式**と呼ばれる代

数関係

$$\gamma_5(\gamma_5 D) + (\gamma_5 D)\gamma_5 = 2a^{2k+1}(\gamma_5 D)^{2k+2} \qquad (9.3.4)$$

を満たす格子上の Dirac 演算子 $D$ に基づいている[*1]．ただし $k$ は負でない整数である．この関係式は，Dirac 演算子を格子上においたために，カイラル対称性を右辺の $a$ に依存する項により少し壊していることを示している．すなわち，素朴な極限 $a \to 0$ では，通常の連続理論での質量 0 の Dirac 粒子の関係

$$\gamma_5 \not{D} + \not{D}\gamma_5 = 0 \qquad (9.3.5)$$

に帰着する．このような性質をもつ Dirac 演算子が実際存在することは後に議論することにして，ここではまず代数関係 (9.3.4) にのみ基づいて，演算子 $D$ の性質によらない一般的な特徴を議論する．すなわち Ginsparg–Wilson の関係式を満たす有限な大きさの格子上のエルミートな演算子

$$H = \gamma_5 a D \qquad (9.3.6)$$

が与えられたものとして，代数関係 (9.3.4) のすべての可能な有限次元の表現の概要を述べる．

まず次の演算子を定義する．

$$\varGamma_5 \equiv \gamma_5 - H^{2k+1} \qquad (9.3.7)$$

この演算子は定義によりエルミート的であり Ginsparg–Wilson の関係式は

$$\varGamma_5 H + H\varGamma_5 = 0 \qquad (9.3.8)$$

と書かれる．この関係式から，もし

$$H\phi_n = a\lambda_n\phi_n, \quad (\phi_n, \phi_n) = 1 \qquad (9.3.9)$$

であるなら

$$H(\varGamma_5\phi_n) = -a\lambda_n(\varGamma_5\phi_n) \qquad (9.3.10)$$

が結論される．ただし，固有関数の内積は Euclid 空間での正定値の

$$(\phi_n, \phi_n) \equiv \sum_x a^4 \phi(x)^\dagger \phi(x) \qquad (9.3.11)$$

で定義し，和は格子上のすべての格子点にわたる．

ここで，まず $\lambda_n = 0$ なら，これらの式は $H\phi_n = 0$ と $H(\gamma_5\phi_n) = 0$ を意味するので

---

*1 $k = 0$ に対応する式が通常 Ginsparg–Wilson の関係式と呼ばれている．代数的な性質および量子異常はすべての $k$ に対して共通に議論される．

$$H\left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}\right)\phi_n=0 \tag{9.3.12}$$

となり，$\lambda_n=0$ の固有状態は $\gamma_5$ の同時固有状態

$$\gamma_5\left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}\right)\phi_n=\pm\left(\frac{1\pm\gamma_5}{2}\right)\phi_n \tag{9.3.13}$$

に選ぶことができる．

つぎに，$\lambda_n\neq 0$ の場合を考える．$\lambda_n\neq 0$ であって $(\Gamma_5\phi_n,\Gamma_5\phi_n)\neq 0$ なら，固有値 $\lambda_n$ を持つ固有状態 $\phi_n$ と固有値 $-\lambda_n$ を持つ $\Gamma_5\phi_n$ は，常に対をなして現れることが(9.3.10)からわかる．$\Gamma_5\phi_n$ のノルムを計算すると，

$$\begin{aligned}(\Gamma_5\phi_n,\Gamma_5\phi_n) &= (\phi_n,(\gamma_5-H^{2k+1})(\gamma_5-H^{2k+1})\phi_n)\\ &= (\phi_n,(1-H^{2k+1}\gamma_5-\gamma_5H^{2k+1}+H^{2(2k+1)})\phi_n)\\ &= [1-(a\lambda_n)^{2(2k+1)}]\\ &= [1-(a\lambda_n)^2][1+(a\lambda_n)^2+\cdots+(a\lambda_n)^{4k}].\end{aligned} \tag{9.3.14}$$

固有値 $\lambda_n$ は実数なので，$1-(a\lambda_n)^2=0$ の場合にのみ状態 $\phi_n$ は，角運動量の表現論などでなじみのいわゆる “highest” 状態

$$\Gamma_5\phi_n=(\gamma_5-H^{2k+1})\phi_n=0 \tag{9.3.15}$$

の条件を満たすことになる．ここで，内積が Euclid 的な正定値の内積を与えることを用いた．

このようにして，$\lambda_n=\pm 1/a$ であるような固有値に属する状態 $\phi_n$ は，演算 $\Gamma_5\phi_n$ により対をなす状態を作り出さないことがわかる．またこれらの状態は，$\gamma_5$ の $\gamma_5\phi_n=\pm\phi_n$ の固有状態に属することもわかる．これらの固有値はまた $\gamma_5 D$ の最大あるいは最小の固有値に対応することは，Ginsparg–Wilson の関係式 (9.3.4) を $\phi_n^\dagger$ と $\phi_n$ で左右からサンドイッチすることにより $\lambda_n\neq 0$ に対して示される関係式

$$\phi_n^\dagger\gamma_5\phi_n=(a\lambda_n)^{2k+1}\quad\text{for}\quad\lambda_n\neq 0 \tag{9.3.16}$$

を用いて示される．すなわち，$|(a\lambda_n)^{2k+1}|=|\phi_n^\dagger\gamma_5\phi_n|\leqq\|\phi_n\|\|\gamma_5\phi_n\|=1$.

最後に $0<|\lambda_n|<1/a$ を満たす状態は，$\lambda_n=\pm|\lambda_n|$，のように対をなして現れ

$$
\begin{aligned}
&\phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n = 0, \\
&\Gamma_5 \phi_n = [1-(a\lambda_n)^{2(2k+1)}]^{1/2}\phi_{-n}, \\
&\gamma_5 \phi_n = (a\lambda_n)^{2k+1}\phi_n + [1-(a\lambda_n)^{2(2k+1)}]^{1/2}\phi_{-n}
\end{aligned}
\tag{9.3.17}
$$

の関係を満たす．ただし $\phi_{-n}$ は固有値 $-\lambda_n$ に属する状態であり，また $\Gamma_5(\Gamma_5\phi_n) = [1-(a\lambda_n)^{2(2k+1)}]\phi_n \propto \phi_n$ に注意する．これらの $\phi_n$ は $|a\lambda_n| < 1$ なので，$\gamma_5$ の固有状態にはなれない．

他方，有限な格子上では $\mathrm{tr}\,\gamma_5 = 0$ が成立すると考えられるが，この関係式は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,\gamma_5 &= \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n \\
&= \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n + \sum_{\lambda_n\neq 0} \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n \\
&= \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n + \sum_{\lambda_n\neq 0} (a\lambda_n)^{2k+1} \\
&= n_+ - n_- + \sum_{\lambda_n\neq 0} (a\lambda_n)^{2k+1} \\
&= n_+ - n_- + N_+ - N_- = 0
\end{aligned}
\tag{9.3.18}
$$

を意味する．この最後の行においては $\lambda_n \neq 0$ の状態からの寄与は，$\lambda_n = \pm 1/a$ である状態以外は，すべて $\pm|\lambda_n|$ のように正負の対をなして現れ，お互いに相殺することを用いた．このようにして，

$$
n_+ + N_+ = n_- + N_- \tag{9.3.19}
$$

の関係が結論される．ここで，$N_\pm$ はそれぞれ固有値 $\lambda_n = \pm 1/a$ に属し，$\gamma_5\phi_n = \pm\phi_n$ であるような状態の数を表す．この関係式は 0 固有値に現れるカイラル非対称 $n_+ - n_-$ が，最大固有値 $|\lambda_n| = 1/a$ 状態に現れるカイラル非対称 $N_+ - N_-$ により釣り合っていることを示している．

この節での議論は Abel 的な理論にも非 Abel 的な理論にも成立する．境界条件の詳細は議論しなかったが，非自明な 0 固有値状態が現れるような場合には境界条件の詳細によらずに常に成立する．この節での指数(0 固有値状態の差 $n_+ - n_-$)の議論は形式的である．というのは，Ginsparg-Wilson の関係式だけでは，指数あるいは量子異常の係数は一意的には決まらないことが知られているからである．

この節での分析の結果を要約すると，有限な格子上での $\gamma_5 D = H/a$ の規格

化された状態(あるいは表現)は，次の3つのクラスに分類される:

(i) $n_\pm$ 状態;

$$\gamma_5 D\phi_n = 0, \quad \gamma_5\phi_n = \pm\phi_n. \tag{9.3.20}$$

(ii) $N_\pm$ 状態; (highest states, $\Gamma_5\phi_n = 0$)

$$\gamma_5 D\phi_n = \pm\frac{1}{a}\phi_n, \quad \gamma_5\phi_n = \pm\phi_n. \tag{9.3.21}$$

ただし複合同順とする．

(iii) 残りの状態 $0 < |\lambda_n| < 1/a$ ; (paired states)

$$\gamma_5 D\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad \gamma_5 D(\Gamma_5\phi_n) = -\lambda_n(\Gamma_5\phi_n), \tag{9.3.22}$$

であり，和則 $n_+ + N_+ = n_- + N_-$ が成立する．

すべての $n_\pm$ 状態と $N_\pm$ 状態は $D$ の固有状態でもあり，それぞれ $D\phi_n = 0$ と $D\phi_n = (1/a)\phi_n$ の関係を満たす．上記の (iii) に現れる状態の総数を $2N_0$ とすると，全状態数 $N$ は，$N = 2(n_+ + N_+ + N_0)$ で与えられ，$N$ は背景場として現れるゲージ場の配位にはよらないと考えられる．

## 9.4 格子上の Atiyah–Singer の指数定理と量子異常

出発点となる格子ゲージ理論の Dirac 粒子に関する経路積分は

$$\int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi \exp\,[\sum_{x,y} a^4\bar\psi(x)D(x,y)\psi(y)] \tag{9.4.1}$$

で与えられる．ここで現れる $D$ は Ginsparg–Wilson の関係式を満たすものとし，ゲージ場は $c$-数の背景場と考える．指数関数の肩に現れる作用は，次のように定義された一般化されたカイラル変換の下で Ginsparg-Wilson の関係式 (9.3.8) を使うと不変であることがわかる

$$\delta\psi(y) = \sum_w i\alpha\Gamma_5(y,w)\psi(w), \quad \delta\bar\psi(x) = \sum_z \bar\psi(z)i\alpha\gamma_5\Gamma_5(z,x)\gamma_5. \tag{9.4.2}$$

ここで，$\alpha$ は無限小の定数のパラメターである．この変換に伴って Dirac 粒子に関する積分測度から次のヤコビアンが生じる．

$$J = \exp\{-2i\alpha\,\mathrm{Tr}\,\Gamma_5\} \tag{9.4.3}$$

このヤコビアンの半分に対して次の関係式が成立する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,\Gamma_5 &\equiv \sum_n \phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n \\
&= \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n + \sum_{0<|\lambda_n|<1/a} \phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n + \sum_{|\lambda_n|=1/a} \phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n \\
&= \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n \\
&= \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n \\
&= n_+ - n_- = \mathrm{index}
\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

ここで前節での Ginsparg-Wilson 代数の表現論の結果(9.3.20)-(9.3.22)を用いた．とくに，$n_\pm$ はエルミートな演算子 $\gamma_5 D$ に対する固有値が 0 の解 $\gamma_5 D\phi_n = 0$ で，$\gamma_5\phi_n = \pm\phi_n$ の関係式を満たすような解の個数であり，演算子 $\gamma_5 D$ の**指数**と呼ばれる．また (9.3.17) を用いた．

格子理論では，内積はすべての格子点に関する和で定義される

$$\phi_n^\dagger \phi_n = (\phi_n, \phi_n) \equiv \sum_x a^4 \phi_n^*(x)\phi_n(x) \tag{9.4.5}$$

ただし，簡単のため本書では，特別な場合は除いて格子点を $\phi_n$ の表式で陽に書かないことにする．固有値 0 の状態を明確に定義するには，有限な大きさの格子 $L = Na = \mathrm{finite}$ を考えればよい．

一般に Dirac 演算子の指数を考えるということは，ゲージ場が運ぶ位相的な情報を Dirac 粒子の性質，すなわち 0 モードの数，に転換して議論することである．したがって，指数を考えるときには，格子理論においても Dirac 粒子の経路積分の測度は非自明なものになる．

つぎに，ヤコビアンに関連して現れた指数 (9.4.4) が Pontryagin の指数に一致していることを示すために

$$\mathrm{Tr}\left\{\Gamma_5 f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right)\right\} = \mathrm{Tr}\left\{\Gamma_5 f\left(\frac{(H/a)^2}{M^2}\right)\right\} = n_+ - n_- \tag{9.4.6}$$

の関係式から出発する．前節の表現論の結果を用いて確かめられるように，指数 $n_+ - n_-$ は $f(0) = 1$ を満たす任意の正則化の関数 $f(x)$ を用いても変化しない．エルミート演算子 $\gamma_5 D$ は，現在の指数の分析においては，特別な役割を果たす．指数の公式で座標に関する和(あるいは，積分)を除いて，局所的な指数

$$\mathrm{tr}\left\{\Gamma_5 f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right)\right\}(x,x) = \mathrm{tr}\left\{(\gamma_5 - H^{2k+1}) f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right)\right\}(x,x) \tag{9.4.7}$$

を考えることにする．ここで，小文字で書いたトレースは Dirac と Yang-Mills の内部自由度の添え字に関する和を表す．局所的な指数は，境界条件によらないので，以下では無限大個の格子点を含む格子 $L = Na \to \infty$ に拡大して考える．

上記の式 (9.4.7) で $a \to 0$ として，連続極限を考える．この連続極限は，格子ゲージ理論では，いわゆる "素朴な" 連続極限と呼ばれているものである．まず，

$$\mathrm{tr}\left\{H^{2k+1} f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right)\right\} \tag{9.4.8}$$

は 0 に近づくことがわかる．大きな $x$ で急速に 0 に近づく正則化の関数 $f(x)$ の存在により，$\gamma_5 D$ の固有値は $\sim M$ の大きさに限定されている．したがって，$a \to 0$ の極限でこの項は 0 になる，すなわち，指数で言って $\mathrm{Tr}\, H^{2k+1} f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right) \sim O(aM)^{2k+1}$ のように 0 に近づく．

したがって

$$\mathrm{tr}\left\{\gamma_5 f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right)\right\} \tag{9.4.9}$$

において，$a$ を小さくした極限を考える．この表式に現れる演算子は $f(x)$ により，十分正則化されているのでトレースを計算するのに平面波を用いることができる．こうして，局所的な指数のゲージ場依存性を陽に取り出すことができる．

物性物理でよく知られているように，正方格子では基本的な運動量の領域が Brillouin 域で定義されている

$$-\frac{\pi}{2a} \leqq k_\mu < \frac{3\pi}{2a} \tag{9.4.10}$$

ここで，演算子 $D$ は，種の倍増の運動量領域では小さな $a$ に対しては，$\sim \dfrac{1}{a}$ のように急速に大きくなり，いわゆる種の倍増は起こらないような演算子とする．したがって，$a \to 0$ の極限で（例えば，$f(x) = e^{-x}$ に選ぶと）

$$\mathrm{tr}\left\{\gamma_5 f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right)\right\} \sim \left(\frac{1}{a}\right)^4 f\left(\frac{1}{(aM)^2}\right) \to 0 \tag{9.4.11}$$

となり，潜在的に種の倍増を与えるような運動量領域は $f(x)$ の存在により，トレースに寄与しなくなる．このようにして，物理的な Dirac 粒子を与えるような運動量領域

$$-\frac{\pi}{2a} \leqq k_\mu < \frac{\pi}{2a} \tag{9.4.12}$$

に限定して上記のトレースを計算することが許されることになる．

極限 $a \to 0$ では，次の式が得られる

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0} \mathrm{tr}\left\{\gamma_5 f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right)\right\} \\
&= \lim_{a\to 0} \mathrm{tr}\int_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}\gamma_5 f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right) e^{-ikx} \\
&= \lim_{L\to\infty}\lim_{a\to 0} \mathrm{tr}\int_{-L}^{L} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}\gamma_5 f\left(\frac{(\gamma_5 D)^2}{M^2}\right) e^{-ikx} \\
&= \lim_{L\to\infty} \mathrm{tr}\int_{-L}^{L} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}\gamma_5 f\left(\frac{(i\gamma_5 \not{D})^2}{M^2}\right) e^{-ikx} \\
&= \mathrm{tr}\left\{\gamma_5 f\left(\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{9.4.13}$$

ただし，この計算で，運動量変数 $k_\mu$ を $-L \leqq k_\mu \leqq L$ に限定しておいて，$a \to 0$ の極限をまず取り，つぎに $L \to \infty$ の極限を考えた．この計算法は，積分が十分よく収束しているときには，正当化される[*2]．この計算では，また $a \to 0$ の極限で演算子 $D$ が

---

*2　正確には，$\int_{-\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{2a}} dx f_a(x) = \int_{L}^{\frac{\pi}{2a}} dx f_a(x) + \int_{-L}^{L} dx f_a(x) + \int_{-\frac{\pi}{2a}}^{-L} dx f_a(x)$ で $f_a(x)$ がパラメター $a$ に依存する積分を考えていることになる（4 次元の積分への一般化は簡単である）．したがって，$\lim_{a\to 0}\int_{L}^{\frac{\pi}{2a}} dx f_a(x)$ と $\lim_{a\to 0}\int_{-\frac{\pi}{2a}}^{-L} dx f_a(x)$ の両方が，$L$ を大きくするときに，任意に小さくできることを示す必要がある．格子ゲージ理論で，出会う積分は一般的に $\lim_{a\to 0}\int_{-\pi/2a}^{\pi/2a} dx e^{-\sin^2 ax/(a^2M^2)} = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} dx e^{-x^2/M^2}$ の形をしており，$f(x) = e^{-x}$ に選んだ場合には，収束条件が満たされることになる．ちなみに，潜在的な種の倍増に対応する運動量領域に対しては，$D$ の振る舞いに対するわれわれの仮定により，$\lim_{a\to 0}\int_{\pi/2a}^{3\pi/2a} dx e^{-1/(a^2M^2)} = \lim_{a\to 0}(\pi/a)e^{-1/(a^2M^2)} = 0$ を与える．

$$
\begin{aligned}
De^{-ikx}h(x) &\rightarrow e^{-ikx}(\not{k} + i\not{\partial} - g\not{A})h(x) \\
&= i(\not{\partial} + ig\not{A})(e^{-ikx}h(x)) \equiv i\not{D}(e^{-ikx}h(x)) \quad (9.4.14)
\end{aligned}
$$

の関係式を，任意の固定した運動量 $k_\mu$, $(-\frac{\pi}{2a} < k_\mu < \frac{\pi}{2a})$，と任意のなめらかな関数 $h(x)$ に対して満たすと仮定した．関数 $h(x)$ は，現在の計算ではゲージポテンシャルに対応する．したがって，ゲージポテンシャル $A_\mu(x)$ は，基本的な格子のサイズ $a$ の距離ではほとんど変化しないなめらかな関数であることを仮定している．実際，のちに議論する Neuberger により導入された $D$ の具体例(およびその一般化)は，このような条件をすべて満たしていることが式 (9.5.17) で示される．

このようにして，第 5 章で議論した結果 (5.3.28) を用いると

$$
n_+ - n_- = \mathrm{Tr}\,\{\gamma_5 f(\frac{\not{D}^2}{M^2})\} \rightarrow \int d^4x\ \mathrm{tr}\ \frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \qquad (9.4.15)
$$

が $M \rightarrow \infty$ の極限で得られ，連続理論での指数定理と量子異常の結果が得られる．この計算では，演算子 $D$ の一般的な性質，すなわち，Ginsparg-Wilson の関係式を満たすエルミートな $\gamma_5 D$ の存在と，$a \rightarrow 0$ の極限で種の倍増を出さずになめらかな連続極限の性質をもっていることのみを使ったことに注意したい．このようにして，格子理論におけるカイラルヤコビアンは実際正しいカイラル量子異常を含んでいることがわかる．(ただし，格子理論で定義された指数が連続極限を考える過程で変化しないことを陰に仮定している.)

つぎに，現在の分析に関してコメントを加えたい．関係式 $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$ は一般に格子ゲージ理論の Hilbert 空間に関して重要な情報を含んでいる．格子ゲージ理論で量子異常を摂動計算するときに通常 $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$ を仮定して行われるが，この場合には

$$
\mathrm{Tr}\,\mathit{\Gamma}_5 = -\mathrm{Tr}\,(a\gamma_5 D)^{2k+1} = N_- - N_+ \qquad (9.4.16)
$$

が成立する．すなわち，前節の結果を用いると状態 $N_\pm$ のみが寄与することが確かめられる(他の固有状態は 0 になるか正と負の寄与をして相殺する)．前節で求めた和則 $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = n_+ - n_- + N_+ - N_- = 0$ と組み合わせると，正しい指数定理 $\mathrm{Tr}\,\mathit{\Gamma}_5 = n_+ - n_-$ が導かれる．またこの和則から，$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$ の関係式は連続極限 $a \rightarrow 0$ では，無限大の固有値を持つ状態の数 $N_\pm$ が定義されないの

で，意味のある定義ができないことがわかる．実は状態 $N_\pm$ は，物理的な Dirac 粒子の位相的な状態が 0 固有値を与えるのに対応して，種の倍増に関係している非物理的な重い状態の位相的な励起状態であることが示される．したがって，種の倍増を除いた物理的な Hilbert 空間では，

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\,\gamma_5 = n_+ - n_- \tag{9.4.17}$$

が成立する．

## 9.5 Ginsparg–Wilson の関係式を満たす演算子 $D$

Ginsparg–Wilson の関係式 (9.3.4) で $k = 0$ とした式を満たす演算子 $D$ の具体形は Neuberger により与えられ，次の形をもっている（これは overlap 演算子と呼ばれる）

$$aD = \frac{1}{2}\left[1 + \gamma_5 \frac{H_W}{\sqrt{H_W^2}}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + D_W \frac{1}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}\right]. \tag{9.5.1}$$

この式で与えられる $D$ が関係式 $\gamma_5 D + D\gamma_5 = 2aD\gamma_5 D$ をエルミートな演算子 $H_W$ の詳細に依らずに満たすことは，直接代入して計算することにより確かめられる．具体的な構成では，$D_W = \gamma_5 H_W$ としては 9.1 節で議論した格子上の Dirac 粒子に対する Wilson の演算子 (9.2.1)

$$S_F = a^4 \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) D_W(x,y) \psi(y) \tag{9.5.2}$$

が用いられる．ただし質量項に関しては，$m_0 \to m_0/a$ と置き換え，Wilson 項の符号を変える．すなわち

$$\begin{aligned}
D_W(x,y) &\equiv i\gamma^\mu C_\mu(x,y) + B(x,y) - \frac{1}{a} m_0 \delta_{x,y}, \\
C_\mu(x,y) &= \frac{1}{2a}[\delta_{x+\hat{\mu}a,y} U_\mu(x) - \delta_{x,y+\hat{\mu}a} U_\mu^\dagger(y)], \\
B(x,y) &= \frac{r}{2a}\sum_\mu [2\delta_{x,y} - \delta_{y+\hat{\mu}a,x} U_\mu^\dagger(y) - \delta_{y,x+\hat{\mu}a} U_\mu(x)], \\
U_\mu(y) &= \exp[iagA_\mu(y)],
\end{aligned} \tag{9.5.3}$$

で与えられる．このようにして構成された $D$ は，(9.3.2) の意味での局所性を満

たすことが知られている．ただしパラメターは

$$2r > m_0 > 0$$

を満たすように選ぶ必要がある．

この演算子に対しては，前節のカイラルヤコビアン (9.4.3) は

$$\ln J = -2i\alpha \,\mathrm{Tr}\left[\gamma_5(1 - aD)\right] \tag{9.5.4}$$

で与えられる．格子ゲージ理論における普通の摂動計算では，このヤコビアンに付随した指数および量子異常の計算を次のように行う．

$$\begin{aligned} -2\,\mathrm{Tr}\,\gamma_5(1 - aD) &= -2\,\mathrm{Tr}\,\gamma_5 + \mathrm{Tr}\,\gamma_5\left(1 + D_W\frac{1}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\,\gamma_5\left(D_W\frac{1}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}\right) \end{aligned} \tag{9.5.5}$$

ここで，有限な格子上で成立する関係式 $\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 0$ を用いた．局所的な指数(すなわち量子異常)は Dirac と Yang–Mills の添え字にわたるトレースを小文字の tr で表すことにして

$$\mathrm{tr}\,\gamma_5\left(D_W\frac{1}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}\right) \tag{9.5.6}$$

で与えられる．$D_W\dfrac{1}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}$ は位相因子であって，連続極限での振る舞いは微妙であり，実際の格子理論での計算は複雑である．しかし，ていねいな計算の後に前節の結果が得られることが知られている．

### 演算子 $D$ の物理的な意味

Neuberger の演算子 $D$ (9.5.1) の定義は抽象的であるので，その物理的な意味(特に種の倍増の物理的な意味)を明確にするために，次の 2 段階の手続きで連続極限を考える．すなわち

$$\frac{2r}{a},\quad \frac{m_0}{a} \tag{9.5.7}$$

を固定しておいて極限 $a \to 0$ を考え，その後に $\dfrac{2r}{a},\ \dfrac{m_0}{a} \to \infty$ として連続極限

をとる．この 2 段階の手続きは Wilson 演算子で定義された格子理論での摂動計算を簡単にすることが知られている．

運動量空間の領域としては，基本的 Brillouin 域を，領域

$$-\frac{\pi}{2a} \leqq k_\mu < \frac{\pi}{2a} \tag{9.5.8}$$

と式 (9.2.16) と (9.2.17) で定義される演算子 $\mathcal{T}_n$, $n = 0 \sim 15$, の組み合わせで表すことにする．

まず連続極限 $a \to 0$ では

$$\begin{aligned} D_W e^{-ikx} h(x) &\to e^{-ikx}(\not{k} + i\not{\partial} - g\not{A} + M_0)h(x) \\ &= (i\not{D} + M_0)(e^{-ikx} h(x)) \end{aligned} \tag{9.5.9}$$

の関係式が，$-\dfrac{\pi}{2a} < k_\mu < \dfrac{\pi}{2a}$ の範囲で固定した任意の $k_\mu$ と固定した $M_0 = -\dfrac{m_0}{a}$ および十分スムーズな $h(x)$ に対して成立することに注意する．次に

$$(D_W)_n \equiv \mathcal{T}_n^{-1} D_W \mathcal{T}_n = i\not{C} + \mathcal{T}_n^{-1} B \mathcal{T}_n - \frac{m_0}{a} \tag{9.5.10}$$

を定義する．ただし，(9.5.3) 式で定義される $\not{C} = \gamma^\mu C_\mu$ と $\mathcal{T}_n$ が交換することを用いた．$(D_W)_n$ の右辺の第 2 項は，$k_\mu$ を $-\dfrac{\pi}{2a} < k_\mu < \dfrac{\pi}{2a}$ に固定して $e^{-ikx}$ に作用させ $a \to 0$ を考えたときの Wilson 項により作られる質量項を与える．この質量項の具体的な値 $M_n$ は，ゲージ場を 0 にしたときの $D_W$ の運動量表示

$$\sum_\mu \gamma^\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + \frac{r}{a}\sum_\mu (1 - \cos ak_\mu) - \frac{m_0}{a} \tag{9.5.11}$$

を思い起こすと，16 個の質量のパラメター $M_n$ は $M_0 = -\dfrac{m_0}{a}$ および次の

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{2r}{a} - \frac{m_0}{a}, \quad (4, -1); \quad & M_n &= \frac{4r}{a} - \frac{m_0}{a}, \quad (6, 1) \\ M_n &= \frac{6r}{a} - \frac{m_0}{a}, \quad (4, -1); \quad & M_n &= \frac{8r}{a} - \frac{m_0}{a}, \quad (1, 1) \end{aligned} \tag{9.5.12}$$

$n = 1 \sim 15$ の 15 個の内の 1 つで与えられることがわかる．この式では，括弧の中にそれぞれの質量パラメターの(多重度，カイラル荷電)を示した．

したがって，$(D_W)_n$ の連続極限 $a \to 0$ での値は

$$\begin{aligned}(D_W)_n e^{-ikx}h(x) &\to e^{-ikx}(\not{k}+i\not{\partial}-g\not{A}+M_n)h(x)\\ &= (i\not{D}+M_n)(e^{-ikx}h(x))\end{aligned} \tag{9.5.13}$$

で与えられる．

定義式

$$D=\frac{1}{2a}\left[1+D_W\frac{1}{\sqrt{D_W^\dagger D_W}}\right] \tag{9.5.14}$$

を思い起こすと

$$\mathcal{T}_n^{-1}D\mathcal{T}_n(e^{-ikx}h(x))\to\frac{1}{2a}\left[1+(i\not{D}+M_n)\frac{1}{\sqrt{\not{D}^2+M_n^2}}\right](e^{-ikx}h(x)) \tag{9.5.15}$$

が得られる．ここで質量のパラメターを

$$\begin{aligned}&M_0<0,\\ &M_n>0,\quad n=1\sim 15\end{aligned} \tag{9.5.16}$$

すなわち $2r>m_0>0$ のように選ぶと $-\dfrac{\pi}{2a}<k_\mu<\dfrac{\pi}{2a}$ の範囲に固定した任意の $k_\mu$ に対して，$a\to 0$ の極限で

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_0^{-1}D\mathcal{T}_0(e^{-ikx}h(x)) &\to i\not{D}(e^{-ikx}h(x)),\\ \mathcal{T}_n^{-1}D\mathcal{T}_n(e^{-ikx}h(x)) &\to \frac{1}{a}(e^{-ikx}h(x)),\quad n\neq 0\end{aligned} \tag{9.5.17}$$

を満たすことが示される．最後の表式では，パラメターを具体的に $4r>2m_0=1>0$ に選んだ．この性質 (9.5.17) は前節での指数定理の証明 (9.5.13) に，十分なものである．

この考察から Ginsparg-Wilson の関係式そのものからは，量子異常の係数が一意的には決まらないことがわかる．なぜなら，Ginsparg-Wilson の関係式は (9.5.1) に現れるエルミートな演算子 $H_W$ の詳細によらずに満たされるからである．例えば，$m_0<0$ に対しては $M_0>0$ となり，$\mathcal{T}_0^{-1}D\mathcal{T}_0\sim 1/a$ を与え，量子異常は 0 になる．$D$ に物理的な状態のみが現われ，種の倍増が現れないという条件 $2r>m_0>0$ を課すと，量子異常は一意的に決まる．

**$k>0$ の演算子**

ここで，一般の $k$ に対して (9.3.8) を満たす解の構成の概要を述べると，まず (9.3.8) と

$$H^{2k+1}\gamma_5+\gamma_5 H^{2k+1}=2H^{2(2k+1)},$$
$$\gamma_5 H^2-H^2\gamma_5=0 \tag{9.5.18}$$

という 2 つの関係式が同等であることに注意する．このとき $H_{(2k+1)}\equiv H^{2k+1}$ を定義すると，

$$H_{(2k+1)}\gamma_5+\gamma_5 H_{(2k+1)}=2H^2_{(2k+1)} \tag{9.5.19}$$

が成立し，この式は Neuberger が扱った (9.3.8) で $k=0$ の場合と同じ形をしている．したがって，解としては (9.5.1) にならって

$$H_{(2k+1)}=\frac{1}{2}\gamma_5\left[1+D_W^{(2k+1)}\frac{1}{\sqrt{(D_W^{(2k+1)})^\dagger D_W^{(2k+1)}}}\right] \tag{9.5.20}$$

で与えられる．ただし (9.5.3) の演算子を用いて

$$D_W^{(2k+1)}\equiv i(\not{C})^{2k+1}+B^{2k+1}-\left(\frac{m_0}{a}\right)^{2k+1} \tag{9.5.21}$$

を定義した．このとき $H_{(2k+1)}$ が対角的になる表示で

$$H=(H_{(2k+1)})^{1/2k+1} \tag{9.5.22}$$

により Dirac 演算子 $H$ が定義される．$0<m_0<2r$ で

$$2m_0^{2k+1}=1 \tag{9.5.23}$$

と選べば，種の倍増が現われず素朴な連続極限で正しい Dirac 演算子 $i\not{D}$ を与えることが示される．このように構成された解は，本書で説明したように正しい指数定理および量子異常を与える．

素朴な連続極限 $a\sim 0$ の近くでは，一般の演算子 $H=a\gamma_5 D$ は

$$H\simeq\gamma_5 ai\not{D}+\gamma_5(\gamma_5 ai\not{D})^2\quad\text{for}\quad k=0,$$
$$H\simeq\gamma_5 ai\not{D}+\gamma_5(\gamma_5 ai\not{D})^4\quad\text{for}\quad k=1$$

のような振る舞いをする．ここで $H$ の最初の項はカイラル対称な項の主要項であり，第 2 項はカイラル対称性を破る項の主要項である．すなわち $k$ を大きく

するとカイラル対称性は改良されるが，演算子は格子上でより広がったものになり局所性は悪くなる．

## 9.6　格子理論の 2, 3 の特徴とカイラルな Dirac 粒子

このように，Ginsparg–Wilson の関係式を用いた格子上の Dirac 粒子の定式化は，多くの課題を解決したと言えるが，以下にこの定式化に関係した 2,3 の重要な性質を議論したい．

まず，(9.3.18) で $N_\pm$ を固有値 $\pm(1/a)$ に属する $\gamma_5$ の固有状態 $\gamma_5\phi_n = \pm\phi_n$ の数として，和則

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = n_+ - n_- + N_+ - N_- = 0 \tag{9.6.1}$$

が成立することを説明した．また，物理的な Hibert 空間に属する固有状態に限定したトレースを $\widetilde{\mathrm{Tr}}$ と書くと，指数の関係式

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\,\gamma_5 = n_+ - n_- \tag{9.6.2}$$

が成立し，この関係式は $a \to 0$ でもなめらかな極限を持つことも (9.4.17) で議論した．

この現象は，第 3 章第 5 節で光の位相演算子に関係して議論した指数の振る舞いと全く同様であることがわかる．すなわち，切断した Hilbert 空間では指数 $\mathrm{Tr}\,\gamma_5$ は 0 になるが，切断を取り除いた極限では一般に有限な指数が現れてくる．

なお，格子のように離散化した理論，とくに Dirac 粒子は格子点上にのみ存在するので，Atiyah-Singer の指数定理に現れる指数という概念が厳密な意味で定義できるかどうかは自明ではない．Atiyah-Singer の指数定理は，なめらかなコンパクトな 4 次元時空(例えば 4 次元球面 $S^4$)上に定義された連続理論における非 Abel 的なゲージ場と Dirac 方程式に対して成立する定理である．この章での指数に関係した議論は，十分なめらかなゲージ場に対して，十分なめらかな格子上の Dirac 場の連続極限を考えると，かなり一般的な考察により指数定理が結論され，またその結果は詳細な摂動計算の結果とも矛盾しないという意味で有効な考察と見なされる．

このように，指数といった側面は少し微妙になるが，他方，経路積分のヤコ

ビアンの扱いではすべて有限な量を扱っているので，連続理論に比して数学的には安心できる操作により量子異常が議論できるという有利さがある．

**カイラルな Dirac 粒子**

カイラルな Dirac 粒子の考察においては，Ginsparg–Wilson の関係式 (9.3.4) を満たす $D$ を用いて

$$\hat{\gamma}_5 = \gamma_5 - 2a^{2k+1}(\gamma_5 D)^{2k+1} = \gamma_5 - 2H^{2k+1} \qquad (9.6.3)$$

を定義して，$\gamma_5(\gamma_5 D)^2 = (\gamma_5 D)^2\gamma_5$ に注意すると(9.3.4)を用いて $\hat{\gamma}_5^2 = 1$ が示され，

$$\hat{P}_\pm = \frac{1 \pm \hat{\gamma}_5}{2} \qquad (9.6.4)$$

は射影演算子 $\hat{P}_\pm^2 = \hat{P}_\pm$ となる．

また Ginsparg–Wilson の関係式 (9.3.4) を満たす $D$ は

$$D = \frac{1+\gamma_5}{2}D\frac{1-\hat{\gamma}_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2}D\frac{1+\hat{\gamma}_5}{2} \qquad (9.6.5)$$

のように左手系と右手系に分解されることが確かめられる．したがって Dirac 粒子の右手系と左手系は

$$\begin{aligned} \psi_{R,L} &\equiv \frac{1 \pm \hat{\gamma}_5}{2}\psi, \\ \bar{\psi}_{L,R} &\equiv \bar{\psi}\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \end{aligned} \qquad (9.6.6)$$

により定義することができる．

このカイラルな成分への分解の帰結としては，まず QCD(quantum chromodynamics)における $\pi$ とか $\eta$ とか $\eta'$ 中間子などを表す疑スカラー演算子 $P^a(x)$ は，$\lambda^a$, $a = 1 \sim 9$, をフレーバー(香り，flavor)の自由度を表す Gell-Mann の $SU(3)$ 行列と単位行列を合わせたものとして

$$\begin{aligned} P^a(x) &= \bar{\psi}_L\lambda^a\psi_R - \bar{\psi}_R\lambda^a\psi_L \\ &= \bar{\psi}(\gamma_5 - H^{2k+1})\lambda^a\psi = \bar{\psi}\Gamma_5\lambda^a\psi \end{aligned} \qquad (9.6.7)$$

で与えられる．すなわち，(9.3.21) の非物理的な状態 $N_\pm$ は演算子 $\Gamma_5$ により自動的に取り除かれることになる．

つぎに，Weinberg-Salam 理論のようなパリティを破るカイラルな理論では

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_L D \psi_L \tag{9.6.8}$$

のような(9.6.6)を考慮したラグランジアンを用いて

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}_L \mathcal{D}\psi_L \exp\,[\sum_{x,y} a^4 \bar{\psi}_L(x) D(x,y) \psi_L(y)] \tag{9.6.9}$$

を扱う．ここで $\alpha$ を定数として，Fermi 粒子数の変換

$$\psi_L(x) \to \exp\,[i\alpha]\psi_L, \quad \bar{\psi}_L(x) \to \bar{\psi}_L(x) \exp\,[-i\alpha] \tag{9.6.10}$$

を考える．$(1-\hat{\gamma}_5)/2$ と $(1+\gamma_5)/2$ がともに射影演算子であることに注意すると，粒子を記述する $\psi_L$ の自由度の数 $\mathrm{Tr}\,(1-\hat{\gamma}_5)/2$ と反粒子を記述する $\bar{\psi}_L$ の自由度の数 $\mathrm{Tr}\,(1+\gamma_5)/2$ との間に差が現われ，ヤコビアンは

$$\begin{aligned} \ln J(\alpha) &= i\alpha[\mathrm{Tr}\,(1+\gamma_5)/2 - \mathrm{Tr}\,(1-\hat{\gamma}_5)/2] \\ &= i\alpha\ \mathrm{Tr}\,(\gamma_5 - H^{2k+1}) \\ &= i\alpha\ \mathrm{Tr}\,\mathit{\Gamma}_5 = i\alpha(n_+ - n_-) \end{aligned} \tag{9.6.11}$$

で与えられる．ここで (9.3.26) の指数を用いた．カイラルな理論を格子上で構成すると，指数に比例した Fermi 粒子数のアンバランスが生じることがわかる．すなわち，第 6 章で議論したように，インスタントンが存在するときは，カイラルな理論は Fermi 粒子数を保存しない．したがって，Weinberg-Salam 理論では陽子の崩壊が起こりうることになる．(有限な正方行列は指数 0 を与えるが，現在の例のような長方形の有限な行列は 0 でない指数を与えることができる．)

カイラルな Dirac 粒子の格子上での扱いは現在も発展中のテーマであり，その詳細に関しては巻末の参考文献を参照されたい．

# 10

# 2次元の場の理論とボソン化

この章では，2次元の場の理論における量子異常の概要を議論する．2次元の場の理論は共形場の理論との関連で，また物性理論への応用などでも重要である．まず Fermi 粒子の理論の Bose 粒子を用いた記述であるボソン化の一般的な手法を，経路積分を用いて定式化する．次に，Kac–Moody 代数および Virasoro 代数の中心拡大はそれぞれカイラル変換および一般座標変換に関係した量子異常の代数的な表現であることを示す．また共形場の理論における演算子積の展開を用いた恒等式の定式化と通常の場の理論的な恒等式の定式化との関連を説明する．最後に，弦の量子論における Weyl 量子異常の計算およびその役割を説明する．弦の量子論におけるゴースト数の量子的破れは Riemann–Roch の定理と結びついている．

## 10.1 2次元理論におけるカイラル対称性の量子的破れ

この章での議論を始める前にまず，例えば，群 $SU(n)$ のゲージ場

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - iV_{\mu}^{a}T^{a} - iA_{\mu}^{a}T^{a}\gamma_{5})\psi(x) \tag{10.1.1}$$

を含む2次元のゲージ理論での量子異常の計算を復習する．群の生成演算子は $\mathrm{tr}\, T^{a}T^{b} = (1/2)\delta_{ab}$ で規格化する．Euclid 理論で

$$\not{D} \equiv \gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - iV_{\mu}^{a}T^{a} - iA_{\mu}^{a}T^{a}\gamma_{5}) \tag{10.1.2}$$

をエルミート演算子とするために，第6章の第1節で説明したように

$$A_{\mu}^{a}(x) \to iA_{\mu}^{a}(x) \tag{10.1.3}$$

と純虚数の場に回転して計算し，計算の後で $A_{\mu}^{a}(x) \to -iA_{\mu}^{a}(x)$ のように回転してもとに戻す．回転した

$$\not{D} \equiv \gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - iV_{\mu}^{a}T^{a} + A_{\mu}^{a}T^{a}\gamma_{5}) \tag{10.1.4}$$

は，Euclid 理論の意味でエルミート的 $\not{D}^{\dagger} = \not{D}$ になり

$$\not{D}\varphi_{n}(x) = \lambda_{n}\varphi_{n}(x), \quad \int d^{2}x\varphi_{n}^{\dagger}(x)\varphi_{m}(x) = \delta_{n,m} \tag{10.1.5}$$

が成立する．このとき経路積分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[\int d^{2}\mathcal{L}\right] \tag{10.1.6}$$

において，ベクトル的な変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha^{a}(x)T^{a}}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha^{a}(x)T^{a}} \tag{10.1.7}$$

の下では，ヤコビアンは

$$\ln J(\alpha) = -i\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^{2}x[\varphi_{n}^{\dagger}\alpha(x)\varphi_{n} - \varphi_{n}^{\dagger}\alpha(x)\varphi_{n}] = 0 \tag{10.1.8}$$

となり量子異常は出ない．他方，カイラル変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha^{a}(x)T^{a}\gamma_{5}}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\alpha^{a}(x)T^{a}\gamma_{5}} \tag{10.1.9}$$

の下では，ヤコビアンは

$$\begin{aligned}
\ln J(\alpha) &= -2i\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^{2}x[\varphi_{n}^{\dagger}\alpha(x)\gamma_{5}\varphi_{n}] \\
&= -2i\lim_{M\to\infty}\int d^{2}x\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_{n}^{\dagger}\alpha(x)\gamma_{5}\exp[-\lambda_{n}^{2}/M^{2}]\varphi_{n}] \\
&\equiv -2i\lim_{M\to\infty}\mathrm{Tr}\,\langle x|\alpha^{a}(x)T^{a}\gamma_{5}\exp[-\not{D}^{2}/M^{2}]|x\rangle
\end{aligned} \tag{10.1.10}$$

という量子異常のマスター公式で与えられる．ただし，トレースは座標に関する積分および Dirac の自由度と Yang-Mills の自由度にわたるものである．

ここで $D_{\mu} = \partial_{\mu} - iV_{\mu}$ をベクトル的なゲージ場のみを含む共変微分とするとき（$\eta^{\mu\nu} = (-1, -1)$ として）

$$\begin{aligned}
\not{D}^{2} &= \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}(\partial_{\mu} - iV_{\mu} - A_{\mu}\gamma_{5})(\partial_{\nu} - iV_{\nu} + A_{\nu}\gamma_{5}) \\
&= \eta^{\mu\nu}(\partial_{\mu} - iV_{\mu} - A_{\mu}\gamma_{5})(\partial_{\nu} - iV_{\nu} + A_{\nu}\gamma_{5}) \\
&\quad + \frac{1}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}](\partial_{\mu} - iV_{\mu} - A_{\mu}\gamma_{5})(\partial_{\nu} - iV_{\nu} + A_{\nu}\gamma_{5})
\end{aligned}$$

$$= D^\mu D_\mu + (D^\mu A_\mu)\gamma_5 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\{-iF_{\mu\nu} - [A_\mu, A_\nu]\}$$
$$-A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][(D_\mu A_\nu) - A_\mu D_\nu]\gamma_5 \qquad (10.1.11)$$

が成立する．ただし$(D_\mu A_\nu)$では微分は$A_\nu$のみに作用する．Euclid 理論でのPauli 行列を用いた$\gamma_5$の定義など($\gamma^1 = i\sigma^2$, $\gamma^2 = i\sigma^1$)

$$\begin{aligned} &\gamma_5 \equiv (-i)\gamma^1\gamma^2 = i\sigma^2\sigma^1 = \sigma^3, \\ &\gamma_5 \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}, \quad \epsilon^{12} = 1 \end{aligned} \qquad (10.1.12)$$

を思い起こすと，(10.1.11)の最後の2項は$\gamma$行列を含まず2次元のカイラル量子異常には寄与しない．したがって量子異常の計算では

$$\not{D}^2 = D^\mu D_\mu + (D^\mu A_\mu)\gamma_5 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\{-iF_{\mu\nu} - [A_\mu, A_\nu]\} \qquad (10.1.13)$$

を用いることができる．ただし，$F_{\mu\nu}$は$V_\mu$から作られる場の強さのテンソルである．

このようにして，**積分可能な量子異常**は

$$\begin{aligned}
&\ln J(\alpha) \\
&= \lim_{M\to\infty} -2i \,\mathrm{tr} \int d^2x \alpha^a(x) T^a \gamma_5 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ikx} \exp\left[-\frac{\not{D}^2}{M^2}\right] e^{ikx} \\
&= \lim_{M\to\infty} -2i \,\mathrm{tr} \int d^2x \alpha^a(x) T^a \gamma_5 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \\
&\quad \times e^{-ikx} \exp\left[-\frac{D^\mu D_\mu + (D^\mu A_\mu)\gamma_5 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\{-iF_{\mu\nu} - [A_\mu, A_\nu]\}}{M^2}\right] e^{ikx} \\
&= 2i \,\mathrm{tr} \int d^2x \alpha^a(x) T^a \gamma_5 [(D^\mu A_\mu)\gamma_5 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\{-iF_{\mu\nu} - [A_\mu, A_\nu]\}] \\
&\quad \times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{k^2} \\
&= \frac{2i}{4\pi} \,\mathrm{tr} \int d^2x \alpha^a(x) T^a [(D^\mu A_\mu) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\{F_{\mu\nu} - i[A_\mu, A_\nu]\}]
\end{aligned} \qquad (10.1.14)$$

のように，4次元の理論と同様に$k_\mu \to Mk_\mu$とスケール変換して指数関数の肩の因子を$1/M$に関して展開して，$1/M^2$の項まで残して計算される．

ここでもとの変数$A_\mu \to -iA_\mu$に戻し，またMinkowski 計量で書くと，

$$\epsilon^{12} = 1 \to \epsilon^{10} = 1 \tag{10.1.15}$$

に注意すると（Dirac の自由度に関してトレースを実行したのちに）

$$\begin{aligned}\ln J(\alpha) &= \frac{i}{\pi}\mathrm{tr}\int d^2x\alpha^a(x)T^a\{(D^\mu A_\mu) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(F_{\mu\nu} + i[A_\mu, A_\nu])\} \\ &= \frac{i}{2\pi}\int d^2x\alpha^a(x)[(D^\mu A_\mu)^a + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu]\end{aligned} \tag{10.1.16}$$

のように書かれる．Abel 的なゲージ理論では，量子異常は

$$\ln J(\alpha) = \frac{i}{\pi}\int d^2x\alpha(x)[(\partial^\mu A_\mu) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \tag{10.1.17}$$

で与えられる．

量子異常という観点からは，$\ln J(\alpha)$ の最終的な式で $(D^\mu A_\mu)$（あるいは Abel 的な理論では $(\partial^\mu A_\mu)$）は，出発点となるゲージ理論でゲージ場 $A_\mu$ の質量項にあたる $A_\mu A^\mu$ を適当な係数で作用に付け加えておけば相殺できる．しかし，2 次元の理論の特性として，この項の係数は発散しない．通常の量子異常（およびヤコビアン）の扱いという点ではこの項には物理的な意味を与えないのが普通であるが，この項はこれから議論するボソン化においては，ボソン場の運動エネルギーの項を与え基本的な役割を果たす．この項を残すということは，演算子形式では，演算子の特殊な正則化を採用していることに対応する．

## 10.2　Abel 的な Fermi 粒子の理論のボソン化

Abel 的なゲージ変換に関係したボソン化を議論したい．この簡単な模型の考察からボソン化の基本的な考えを学ぶことができる．ボソン化には種々のバージョンがあるが，ここでは 2 つの代表的なものを議論したい．

### 自由な Fermi 粒子のボソン化

出発点として

$$Z(\xi, V_\mu) = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\,[i\int d^2x\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\xi(x)\gamma_5 - iV_\mu)\psi] \tag{10.2.1}$$

を考え，この式でカイラルな変数変換

$$\psi(x) = \exp[i\xi(x)\gamma_5]\psi'(x), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}'(x)\exp[-i\xi(x)\gamma_5] \tag{10.2.2}$$

を考えると，作用から $\xi(x)$ 依存性が取り除かれ

$$\begin{aligned} Z(\xi, V_\mu) &= \exp[i\Gamma(V_\mu,\xi)]\int \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' \exp[i\int d^2x\bar{\psi}' i\gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu)\psi'] \\ &= \exp[i\Gamma(V_\mu,\xi)]\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[i\int d^2x\bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu)\psi] \end{aligned} \tag{10.2.3}$$

が得られる．ただし $\Gamma$ は積分した量子異常であり，Minkowski 計量では

$$\begin{aligned} i\Gamma(V_\mu,\xi) &= \frac{i}{\pi}\int d^2x\int_0^1 ds\xi(x)[\partial^\mu\partial_\mu(1-s)\xi + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \\ &= \frac{i}{\pi}\int d^2x[\frac{1}{2}\xi(x)\partial^\mu\partial_\mu\xi(x) + \xi(x)\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \\ &= \frac{i}{\pi}\int d^2x[-\frac{1}{2}\partial^\mu\xi(x)\partial_\mu\xi(x) + \xi(x)\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \end{aligned} \tag{10.2.4}$$

で与えられる．この式の導出は，まずある程度ゲージ変換して $\xi(x)$（すなわち有効な軸性ベクトル場）の大きさを $A_\mu = (1-s)\partial_\mu\xi(x)$ にしたときにさらに無限小のゲージ変換 $ds\xi(x)$ を行い，(10.1.17)を用いてこれらの無限小のゲージ変換を積分して最終的な結果が得られる．

次に，2 次元のゲージ場は 2 つの独立な成分を含み一般に

$$V_\mu(x) = \partial_\mu\alpha(x) + \epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\beta(x) \tag{10.2.5}$$

のように，2 つの任意の関数 $\alpha(x)$ と $\beta(x)$ を含む成分に分解できることに注意する．Minkowski 計量では $\gamma^0 = \sigma^1$，$\gamma^1 = i\sigma^2$，$\gamma_5 = \sigma^3$，$\epsilon^{10} = \epsilon_{01} = 1$ なので

$$\gamma^\mu V_\mu = \gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x) + \gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\beta(x) \tag{10.2.6}$$

が成立し，したがって

$$\begin{aligned} Z(\xi, V_\mu) &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[i\int d^2x\bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\xi(x)\gamma_5 + i\partial_\mu\alpha(x) \\ &\quad + i\gamma_5\partial^\mu\beta(x))\psi] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[i\int d^2x\bar{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu(\xi(x)+\beta(x))\gamma_5)\psi] \end{aligned} \tag{10.2.7}$$

のように，量子異常を出さないベクトル的な変数変換 $\psi(x) \to \exp[i\alpha(x)]\psi(x)$ により $\alpha(x)$ を除去した後に書くことができる．すなわち

$$
\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\xi Z(\xi, V_\mu) &= \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\,[i\int d^2x\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu(\xi(x) \\
&\quad +\beta(x))\gamma_5)\psi] \\
&= \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\,[i\int d^2x\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\xi(x)\gamma_5)\psi] \\
&= \int \mathcal{D}\xi Z(\xi, 0) \qquad (10.2.8)
\end{aligned}
$$

が結論される．この式と $\Gamma(V_\mu, \xi)$ を含む式(10.2.3)を組み合わせると

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\xi \exp\,[i\Gamma(V_\mu, \xi)] \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\,[i\int d^2x\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - iV_\mu)\psi] \\
&= \text{independent of} \quad V_\mu \qquad (10.2.9)
\end{aligned}
$$

が結論される．この(10.2.9)と，$V_\mu$ を Schwinger の源と見なしたときの Fermi 粒子の理論での連結した Green 関数の生成汎関数 $W(V_\mu)$ の定義式

$$
e^{iW(V_\mu)} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\,\{i\int d^2x[\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + V_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi]\} \qquad (10.2.10)
$$

および $\Gamma$ の式(10.2.4)を組み合わせて

$$
e^{-iW(V_\mu)} = \int \mathcal{D}\xi \exp\left\{\frac{-i}{\pi}\int d^2x[\frac{1}{2}\partial^\mu\xi(x)\partial_\mu\xi(x) - V_\mu\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\xi(x)]\right\} \qquad (10.2.11)
$$

が得られる．あるいはこの式のエルミート共役を考えて

$$
e^{iW(V_\mu)} = \int \mathcal{D}\xi \exp\left\{\frac{i}{\pi}\int d^2x[\frac{1}{2}\partial^\mu\xi(x)\partial_\mu\xi(x) - V_\mu\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\xi(x)]\right\} \qquad (10.2.12)
$$

が結論される．

すなわち，自由な Fermi 粒子 $\psi$ の理論(10.2.10)と自由な Bose 粒子 $\xi$ の理論(10.2.12)が同じ Green 関数の生成汎関数 $W(V_\mu)$ を与え $V_\mu$ に関して関数微分することにより

$$
\langle\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)\rangle = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \langle\epsilon^{\mu\alpha}\partial_\alpha\xi(x)\epsilon^{\nu\beta}\partial_\beta\xi(y)\rangle \qquad (10.2.13)
$$

という Fermi 粒子を用いた相関関数と Bose 粒子を用いた相関関数の同等性が結論される．

**Thirring 模型を解く**

相互作用する 2 次元の Fermi 粒子の理論(質量を持たない Thirring 模型と呼ばれる)

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^2x[\bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \frac{g^2}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi] \\
&= \int d^2x[\bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \frac{1}{2}B^\mu B_\mu + gB_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi] \qquad (10.2.14)
\end{aligned}
$$

を考える．ただし，第二の式で補助場 $B_\mu$ を運動方程式を用いて消去すると第一の定義式が得られる．経路積分の公式は

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}B_\mu \exp\{i\int d^2x[\bar{\Psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - igB_\mu)\Psi + \frac{1}{2}B^\mu B_\mu]\} \\
&= \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\xi\mathcal{D}\eta \\
&\quad \times \exp\{i\int d^2x[\bar{\Psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig\partial_\mu\eta - ig\gamma_5\partial_\mu\xi)\Psi + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta - \frac{1}{2}\partial^\mu\xi\partial_\mu\xi]\} \qquad (10.2.15)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただし，2 次元空間で成立する一般的な分解

$$
\begin{aligned}
&B_\mu(x) = \partial_\mu\eta(x) + \epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\xi(x), \quad \gamma^\mu B_\mu = \gamma^\mu\partial_\mu\eta(x) + \gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\xi(x), \\
&(\delta B_\mu)^2 \equiv \int d^2x[\delta B_\mu\delta B^\mu] = \int d^2x(-\partial_\mu\partial^\mu)[\delta\eta^2 - \delta\xi^2], \\
&\mathcal{D}B_\mu = \det[-\partial_\mu\partial^\mu]\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\xi \qquad (10.2.16)
\end{aligned}
$$

を用いた．最後の式は $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ から体積要素 $\sqrt{g}d^2x$ を導くのと同じ操作である．Minkowski 計量では，$\epsilon^{10} = \epsilon_{01} = 1$ に注意する．

まず(10.2.15)における $\eta$ と $\Psi$ の結合項は，$\Psi \to \exp[i\eta]\Psi$ というヤコビアンを出さない変数変換で消去される．次に

$$
\Psi(x) = \exp[ig\xi(x)\gamma_5]\psi(x) \qquad (10.2.17)
$$

という変数変換をすると，Fermi 粒子と $\xi$ の結合項は消去されるが，ヤコビアンとして

$$\begin{aligned}\ln J(\xi) &= \frac{i}{\pi}\int d^2x\int_0^1 dsg\xi(x)[g(1-s)(\partial^\mu\partial_\mu\xi)] \\ &= \frac{-i}{2\pi}\int d^2xg^2\partial^\mu\xi(x)\partial_\mu\xi \end{aligned} \tag{10.2.18}$$

が与えられる．このヤコビアンの計算は前節の計算(10.2.4)と同様である．こうして経路積分は

$$\int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\xi\mathcal{D}\eta \exp\left\{i\int d^2x[\bar\psi i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta - \frac{1+g^2/\pi}{2}\partial^\mu\xi\partial_\mu\xi]\right\} \tag{10.2.19}$$

となる．すなわち相互作用する Fermi 粒子 $\Psi$ の理論が自由な Fermi 粒子 $\psi$ とスカラー粒子 $\eta$ と $\xi$ の理論の和に分解されたわけである．ただし，変数 $\xi$ は負の計量を持つ場に対応する．

したがって，これまでに行った変数変換を思いおこして，

$$\Psi_L(x) \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}\Psi(x) = \exp\,[ig\eta(x) - ig\xi(x)]\psi_L(x) \tag{10.2.20}$$

の伝播関数(あるいは相関関数)は

$$\begin{aligned}&\langle\Psi_L(x)\bar\Psi_L(y)\rangle \\ &\quad = \langle\psi_L(x)\bar\psi_L(y)\rangle\langle\exp\,[ig\eta(x) - ig\eta(y)]\rangle\langle\exp\,[-ig\xi(x) + ig\xi(y)]\rangle\end{aligned} \tag{10.2.21}$$

のように書くことができる．Minkowski 計量では

$$\partial_\mu\partial^\mu G(x-y) = \delta^2(x-y) \tag{10.2.22}$$

を満たす Green 関数は

$$G(x-y) = \frac{-i}{4\pi}\ln\,[(x^1-y^1)^2 - (x^0-y^0)^2] \tag{10.2.23}$$

で与えられることを考慮すると

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\langle\psi(x)\bar\psi(y)\rangle &= \langle(\frac{\delta}{\delta\bar\psi(x)}S)\bar\psi(y)\rangle \\ &= \int\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\{-i(\frac{\delta}{\delta\bar\psi(x)}e^{iS})\bar\psi(y)\} \\ &= i\delta^2(x-y) \end{aligned} \tag{10.2.24}$$

と組み合わせて，自由な Fermi 粒子の相関関数

$$\begin{aligned}\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle &= \gamma^\mu\partial_\mu G(x-y) \\ &= \gamma^\mu\partial_\mu\frac{-i}{4\pi}\ln\left[(x^1-y^1)^2-(x^0-y^0)^2\right] \\ &= \frac{-i}{2\pi}\frac{\gamma^\mu(x-y)_\mu}{(x-y)^2}\end{aligned} \tag{10.2.25}$$

が求まる．$\xi$ に対する源 $J(x)$ を加えた計算

$$\begin{aligned}&\int\mathcal{D}\xi\exp\left\{i\int d^2x[-\frac{1+g^2/\pi}{2}\partial^\mu\xi\partial_\mu\xi-g\xi(x)J(x)]\right\} \\ &=\exp\left[-\frac{ig^2}{2(1+g^2/\pi)}\int d^2xd^2yJ(x)G(x-y)J(y)\right]\end{aligned} \tag{10.2.26}$$

から（$x$ と $y$ の組み合わせが 2 回現われることに注意して）

$$\begin{aligned}\langle\exp\left[-ig\xi(x)+ig\xi(y)\right]\rangle &= \exp\left[\frac{ig^2}{1+g^2/\pi}G(x-y)\right] \\ &= \exp\left\{\frac{g^2}{4\pi(1+g^2/\pi)}\ln\left[-(x-y)^2\right]\right\} \\ &= \left[-(x-y)^2\right]^{\frac{g^2/\pi}{4(1+g^2/\pi)}}\end{aligned} \tag{10.2.27}$$

が得られる．同様な計算から（指数の分母で $1+g^2/\pi\to-1$ の置き換えをして）

$$\langle\exp\left[ig\eta(x)-ig\eta(y)\right]\rangle=\left[-(x-y)^2\right]^{-\frac{g^2/\pi}{4}}. \tag{10.2.28}$$

このようにして，相互作用する $\Psi$ の相関関数(10.2.21)は

$$\langle\Psi_L(x)\bar{\Psi}_L(y)\rangle=\frac{i(1-\gamma_5)}{4\pi}\gamma^\mu(x-y)_\mu\frac{1}{\left[-(x-y)^2\right]^{1+\frac{(g^2/\pi)^2}{4(1+g^2/\pi)}}} \tag{10.2.29}$$

のように厳密に求められる．任意の $2n$ 点の相関関数も同様に正確に計算される．

Thirring 模型(10.2.14)で Fermi 粒子の質量項を加えると，いわゆる sine-Gordon 模型と呼ばれるものと同値になることが質量項に関して展開することにより示される．

## 10.3 非 Abel 的な Fermi 粒子の理論のボソン化

非 Abel 的なボソン化を議論するために，まず記法を簡単に復習する．2 次元

の理論では，Minkowski 計量で次の関係式が成立する．

$$\begin{aligned}&\gamma^0\frac{1-\gamma_5}{2}=\frac{\gamma^0+\gamma^1}{2}\equiv\gamma^+,\quad \gamma^1\frac{1-\gamma_5}{2}=\frac{\gamma^1+\gamma^0}{2}=\gamma^+,\\&V_\mu\gamma^\mu\frac{1-\gamma_5}{2}=(V_0+V_1)\left(\frac{\gamma^0+\gamma^1}{2}\right)\equiv V_+\gamma^+\end{aligned}\tag{10.3.1}$$

同様に

$$\begin{aligned}&\gamma^0\frac{1+\gamma_5}{2}=\frac{\gamma^0-\gamma^1}{2}\equiv\gamma^-,\quad \gamma^1\frac{1+\gamma_5}{2}=\frac{\gamma^1-\gamma^0}{2}=-\gamma^-,\\&V_\mu\gamma^\mu\frac{1+\gamma_5}{2}=(V_0-V_1)\left(\frac{\gamma^0-\gamma^1}{2}\right)\equiv V_-\gamma^-,\\&A_\pm=A_0\pm A_1,\quad A^\pm=\frac{1}{2}(A^0\pm A^1),\\&A_\mu B^\mu=\eta^{+-}A_+B_-+\eta^{-+}A_-B_+,\quad \eta^{+-}=\eta^{-+}=\frac{1}{2},\\&\epsilon^{\mu\nu}A_\mu B_\nu=\epsilon^{+-}A_+B_-+\epsilon^{-+}A_-B_+,\quad \epsilon^{+-}=-\epsilon^{-+}=\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{10.3.2}$$

が成立する．ただし，$\epsilon^{10}=1$ に選んだ．

### 自由な Fermi 粒子の非 Abel 的なボソン化

出発点として群 $SU(n)$ に属する Fermi 粒子の理論

$$\begin{aligned}Z(\xi,v_\mu)\ &=\ \int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int d^2x\bar{\psi}i\{\gamma^\mu\partial_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}\right.\\&\quad\left.+\gamma^\mu[\partial_\mu+(U(\xi)^\dagger\partial_\mu U(\xi)-iU(\xi)^\dagger v_\mu U(\xi))]\frac{1+\gamma_5}{2}\}\psi\right\}\\&=\ \int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int d^2x\bar{\psi}i\{\gamma^+\partial_+\right.\\&\quad\left.+\gamma^-[\partial_-+(U(\xi)^\dagger\partial_-U(\xi)-iU(\xi)^\dagger v_-U(\xi))]\}\psi\right\}\end{aligned}\tag{10.3.3}$$

を考える．ここで $v_\mu=v_\mu^aT^a$ であり $U(\xi)\equiv\exp[-i\xi^aT^a]$ である．形式的には，$(U(\xi)^\dagger\partial_\mu U(\xi)-iU(\xi)^\dagger v_\mu U(\xi))$ は $-iv_\mu$ の $U(\xi)$ を用いたゲージ変換を表す．したがって，もし量子異常がなければ $U(\xi)$ の自由度は除去できるものである．

次に，2 次元の理論では $v_\mu$ の独立な成分は 2 つしかないので，一般に

$$
\begin{aligned}
-iv_- &= \exp\,[ih^a(x)T^a]\partial_- \exp\,[-ih^a(x)T^a] \equiv U^\dagger(h)\partial_- U(h), \\
-iv_+ &= \exp\,[il^a(x)T^a]\partial_+ \exp\,[-il^a(x)T^a] \equiv U^\dagger(l)\partial_+ U(l)
\end{aligned} \tag{10.3.4}
$$

のように，Abel 的な理論の場合の分解(10.2.5)の一般化として，2 つの独立な関数 $h(x) = h^a(x)T^a$ と $l(x) = l^a(x)T^a$ を用いて書くことができることに注意する.（われわれの応用においては，$v_\pm$ は無限小の源場の場合である.）このことを用いると

$$
\begin{aligned}
\int \mathcal{D}U(\xi)Z(\xi, v_-) &= \int \mathcal{D}U(\xi)\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int d^2x\bar{\psi}i\{\gamma^+\partial_+ \right.\\
&\quad \left. + \gamma^-[\partial_- + (U(\xi)^\dagger\partial_- U(\xi) - iU(\xi)^\dagger v_- U(\xi))]\}\psi\right\} \\
&= \int \mathcal{D}U(\xi)\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int d^2x\bar{\psi}i\{\gamma^+\partial_+ \right.\\
&\quad \left. + \gamma^-[\partial_- + U(\xi)^\dagger U^\dagger(h)\partial_-(U(h)U(\xi))]\}\psi\right\} \\
&= \int \mathcal{D}U\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int d^2x\bar{\psi}i\{\gamma^+\partial_+ \right.\\
&\quad \left. + \gamma^-[\partial_- + (U^\dagger\partial_- U)]\}\psi\right\} \\
&= \text{independent of } v_-
\end{aligned} \tag{10.3.5}
$$

が結論される．ただし，経路積分の測度はゲージ不変 $\mathcal{D}U(\xi) = \mathcal{D}(U(h)U(\xi))$ であることを用いた．

ここで $Z(\xi, v_-)$ の表式(10.3.3)に戻って，経路積分の変数変換

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \exp\,[i\xi^a(x)T^a\frac{1+\gamma_5}{2}]\psi'(x), \\
\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}'(x)\exp\,[i\xi^a(x)T^a\frac{-1+\gamma_5}{2}]
\end{aligned} \tag{10.3.6}
$$

を考えると

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\gamma_5}{2}\exp\,[i\xi^a(x)T^a\frac{1+\gamma_5}{2}] &= \frac{1+\gamma_5}{2}\exp\,[i\xi^a(x)T^a], \\
\frac{1-\gamma_5}{2}\exp\,[i\xi^a(x)T^a\frac{1+\gamma_5}{2}] &= \frac{1-\gamma_5}{2}
\end{aligned} \tag{10.3.7}
$$

に注意すると

$$Z(\xi, v_-) = \exp\left[i\Gamma(v_-, \xi)\right] \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int d^2x\bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^- v_-]\psi]\right\} \tag{10.3.8}$$

が得られる．ただし $\Gamma$ は積分した量子異常であり，$\gamma_5$ を含む変換のみが量子異常を出すことを用いると，Minkowski 計量では

$$\begin{aligned} &\ln J(\xi) \\ &= \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\xi(x)\{(D^\mu A_\mu(s)) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(F_{\mu\nu}(s) + i[A_\mu(s), A_\nu(s)])\} \end{aligned} \tag{10.3.9}$$

である．この計算は Abel 的な理論の場合(10.2.5)と同様であり，まずある程度変数変換を行って $U$ を $U(s) = \exp\left[-i\xi^a T^a(1-s)\right]$ にした段階でさらに無限小の変換 $ds\xi(x)$ を行い，これらの無限小の変換を積分して最終的な結果が得られる．具体的には

$$\begin{aligned} &U(s) \equiv \exp\left[-i\xi^a(x)T^a(1-s)\right], \\ &V_\mu(s) \equiv \frac{i}{2}U(s)^\dagger(\partial_\mu - iv_\mu)U(s) \equiv A_\mu(s), \\ &D^\mu A_\mu(s) = \partial^\mu A_\mu(s) - i[V_\mu(s), A_\mu(s)] = \frac{1}{2}\partial^\mu[U(s)^\dagger(\partial_\mu - iv_\mu)U(s)], \\ &F_{\mu\nu}(s) + i[A_\mu(s), A_\nu(s)] \\ &\quad = \partial_\mu V_\nu(s) - \partial_\nu V_\mu(s) - i[V_\mu(s), V_\nu(s)] + i[A_\mu(s), A_\nu(s)] \\ &\quad = \partial_\mu V_\nu(s) - \partial_\nu V_\mu(s), \end{aligned} \tag{10.3.10}$$

に注意すると(10.3.9)から

$$\begin{aligned} i\Gamma(v_-, \xi) &= \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\xi(x)\{\partial^\mu(\frac{i}{2}U(s)^\dagger(\partial_\mu - iv_\mu)U(s)) \\ &\quad + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(U(s)^\dagger(\partial_\nu - iv_\nu)U(s))\} \\ &= \frac{-i}{4\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\partial_\mu\xi(x)\{U(s)^\dagger(v^\mu + \epsilon^{\mu\nu}v_\nu)U(s) \\ &\quad + iU(s)^\dagger\partial^\mu U(s) + i\epsilon^{\mu\nu}U(s)^\dagger\partial_\nu U(s)\} \\ &\equiv \frac{-i}{2\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\partial_+\xi(x)U(s)^\dagger v^+ U(s) - i\Gamma_{\mathrm{WZW}}(\xi) \end{aligned} \tag{10.3.11}$$

が得られる．ここで第 1 項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\partial_+\xi(x)(-i)U(s)^\dagger v^+U(s)\\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\frac{d}{ds}[U(s)\partial_+U(s)^\dagger]v^+\\
&\quad=\frac{-i}{2\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x[-iU(\xi)\partial_+U(\xi)^\dagger]v^+(x) \qquad (10.3.12)
\end{aligned}
$$

となり（$s=0$ のところが寄与する），第 2 項の Wess-Zumino-Witten 項と呼ばれる $\Gamma_{\mathrm{WZW}}$ は

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\mathrm{WZW}}(\xi) \;\equiv\; &\frac{-1}{8\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\frac{d}{ds}[\partial_\mu U(s)^\dagger\partial^\mu U(s)]\\
&+\frac{i}{4\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\partial_\mu\xi(x)\epsilon^{\mu\nu}U(s)^\dagger\partial_\nu U(s)\\
=\;&\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\partial_\mu U(\xi)^\dagger\partial^\mu U(\xi)\\
&-\frac{i}{4\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\xi(x)\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu U(s)^\dagger\partial_\nu U(s)\\
=\;&\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\partial_\mu U(\xi)^\dagger\partial^\mu U(\xi)\\
&-\frac{i}{4\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\int_0^1 ds\xi(x)\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu U(1-s)^\dagger\partial_\nu U(1-s)
\end{aligned}
\qquad (10.3.13)
$$

で与えられる．$\Gamma_{\mathrm{WZW}}$ の最後の式は，

$$
\begin{aligned}
&\xi(x)=-iU(1-s)^\dagger\frac{d}{ds}U(1-s),\\
&\partial_\mu U(1-s)^\dagger=-U(1-s)^\dagger\partial_\mu U(1-s)U(1-s)^\dagger
\end{aligned}
\qquad (10.3.14)
$$

に注意して，パラメター $s$ を第 3 の座標と見なして 3 次元空間 $(x^0,x^1,x^2)\equiv(t,x^1,s)$ の積分の形に書くことができる

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\mathrm{WZW}}(\xi) \;=\; &\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{tr}\int d^2x\partial_\mu U(\xi)^\dagger\partial^\mu U(\xi)\\
&+\frac{1}{12\pi}\,\mathrm{tr}\int_B d^3x\epsilon^{\mu\nu\lambda}(U^\dagger\partial_\mu U)(U^\dagger\partial_\nu U)(U^\dagger\partial_\lambda U)
\end{aligned}
\qquad (10.3.15)
$$

ただし 3 次元の完全反対称テンソルは $\epsilon^{102}=1$ で規格化し，積分領域の $B$(ball)

は $0 \leqq x^2 = s \leqq 1$ を表す.

連結した Green 関数の生成汎関数を

$$\exp[iW(v_-)] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left\{i\int d^2x\bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^- v_-]\psi\right\} \qquad (10.3.16)$$

で定義すると, $\int \mathcal{D}U(\xi)Z(\xi, v_-)$ が $v_-$ に依存しないこと(10.3.5)を思い起こすと(10.3.8)から

$$\exp[-iW(v_-)] = \int \mathcal{D}U(\xi)\exp[i\Gamma(\xi, v_-)] \qquad (10.3.17)$$

が成立し, この式のエルミート共役をとって

$$\begin{aligned}\exp[iW(v_-)] &= \int \mathcal{D}U(\xi)\exp\left[i\Gamma_{\mathrm{WZW}} - \frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}\int d^2x[iU(\xi)\partial^- U(\xi)^\dagger]v_-(x)\right] \\ &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{i\int d^2x[\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + v_-^a\bar{\psi}\gamma^- T^a\psi]\right\}\end{aligned} \qquad (10.3.18)$$

が結論される. この最後の式(10.3.18)で $v_-^a(x)$ を Schwinger の源と見なし 2 つの表式を比較すると, 自由な Fermi 粒子のボソン化のルール

$$\bar{\psi}(x)\gamma^- T^a\psi(x) \to \frac{(-i)}{2\pi}\operatorname{tr} T^a U(\xi)\partial^- U^\dagger(\xi) \qquad (10.3.19)$$

が導かれ, 自由な Fermi 粒子の理論が Wess–Zumino 項を含む非線形シグマ模型に翻訳される. この Fermi 粒子のボソン化は 2 次元の共形場の理論で基本的な役割を果たす.

## 10.4　Kac–Moody 代数と Virasoro 代数

ここでは, 2 次元の共形場の理論に関する基礎的なことがらを議論する. Kac–Moody 代数および Virasoro 代数の中心拡大が量子異常の代数的な表現であることを示す. また共形場の理論に特徴的な演算子積の展開を用いた WT 恒等式と場の理論的な恒等式の関係を説明する.

**Kac–Moody 代数**

出発点となる Euclid 化した 2 次元時空での Fermi 粒子の作用は

$$S = \int d^2x \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu [\partial_\mu - iV_\mu^a T^a]\psi(x) \tag{10.4.1}$$

で与えられる．この作用を用いた経路積分

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp[S] \tag{10.4.2}$$

において，カイラルなゲージ変換

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \exp[i\alpha^a(x)T^a\gamma_5]\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}(x)\exp[i\alpha^a(x)T^a\gamma_5] \end{aligned} \tag{10.4.3}$$

を考え，この章の最初の節の量子異常の計算結果(10.1.14)で $A_\mu = 0$ として Euclid 計量で書いたものを用いると（$\mathrm{tr}\, T^aT^b = (1/2)\delta_{ab}$ に注意して）

$$\langle D_\mu j_5^{a\mu}(x)\rangle = \partial_\mu \langle j_5^{a\mu}(x)\rangle + f^{abc}V_\mu^b \langle j_5^{c\mu}(x)\rangle = \frac{i}{4\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a \tag{10.4.4}$$

という恒等式が得られる．同様に

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \exp[i\alpha^a(x)T^a]\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}(x)\exp[-i\alpha^a(x)T^a] \end{aligned} \tag{10.4.5}$$

というベクトル的な変換を考えると，この変換は最初の節で説明したように量子異常を含まないので

$$\langle D_\mu j^{a\mu}(x)\rangle = \partial_\mu \langle j^{a\mu}(x)\rangle + f^{abc}V_\mu^b \langle j^{c\mu}(x)\rangle = 0 \tag{10.4.6}$$

が成立する．

ただし $\epsilon^{12} = 1$ と規格化し，

$$\begin{aligned} j_5^{a\mu}(x) &\equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5 T^a\psi(x), \\ j^{a\mu}(x) &\equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu T^a\psi(x) \end{aligned} \tag{10.4.7}$$

である．また 2 次元理論の特性として，軸性カレントとベクトルカレントは具体的に計算して確かめられるように

$$j_5^{a\mu}(x) = (-i)\epsilon^{\mu\nu} j_\nu^a(x) \tag{10.4.8}$$

で関係づけられる．

さて，軸性カレントを含む恒等式(10.4.4)の両辺を $V_\nu^b(y)$ で関数微分し，そ

の後に $V^a_\mu = 0$ とおくと(経路積分の作用から $j^{b\nu}(y)$ が降りてくることを考慮して)

$$\partial_\mu \langle T^* j_5^{a\mu}(x) j^{b\nu}(y)\rangle + f^{abc}\langle j_5^{c\nu}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) = \frac{i\delta_{ab}}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu \delta^{(2)}(x-y) \tag{10.4.9}$$

が得られ，同様にベクトルカレントを含む恒等式から

$$\partial_\mu \langle T^* j^{a\mu}(x) j^{b\nu}(y)\rangle + f^{abc}\langle j^{c\nu}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) = 0 \tag{10.4.10}$$

が得られる．

ここで，BJL(Bjorken–Johnson–Low)の処方と呼ばれるものを想起する．この処方は一般に任意の Lorentz 共変な計算で得られた時間順序積(これは $T^*$ 積で定義される)を，通常の演算子形式の(必ずしも Lorentz 共変でない)時間順序積 $T$ へ変換する指針を与えるものである．具体的には，任意の 2 つの演算子 $A(x)$ と $B(y)$ に対して併進不変性を考慮して

$$\lim_{k_2\to\infty}\int d^2x e^{ikx}\langle T^* A(x)B(0)\rangle = 0 \tag{10.4.11}$$

が成立するなら

$$\langle T^* A(x)B(0)\rangle = \langle T A(x)B(0)\rangle \tag{10.4.12}$$

と置いてよいとするものである．直感的には，同時刻交換関係が定義されているとする正準形式では同時刻の概念(したがって積)が不定性なく定義されているはずであるから，上の Fourier 変換の大きな運動量の極限(これは座標表示では同時刻に対応する)も不定性なく定義されているとするものである．もし，上の Fourier 変換で大きな運動量極限が 0 にならないときは，その量を両辺から差し引いたもので時間順序積 $T$ を定義する．

この処方箋を上で導いた(10.4.9)と(10.4.10)に適用すると

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \langle T j_5^{a\mu}(x) j^{b2}(y)\rangle + f^{abc}\langle j_5^{c2}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) = \frac{i\delta_{ab}}{2\pi}\partial_1 \delta^{(2)}(x-y),\\
&\partial_\mu \langle T j_5^{a\mu}(x) j^{b1}(y)\rangle + f^{abc}\langle j_5^{c1}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) = 0,\\
&\partial_\mu \langle T j^{a\mu}(x) j^{b2}(y)\rangle + f^{abc}\langle j^{c2}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) = 0
\end{aligned} \tag{10.4.13}$$

が得られる．これらの式のうちで，例えば，第二の式の導出は

$$\partial_\mu \langle T^* j_5^{a\mu}(x) j^{b1}(y)\rangle = -f^{abc}\langle j_5^{c1}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) - \frac{i\delta_{ab}}{2\pi}\partial_2 \delta^{(2)}(x-y) \tag{10.4.14}$$

において，右辺に $\delta$ 関数の時間微分 $\partial_2 \delta^{(2)}(x-y)$ が現われるが，このような項は両辺の Fourier 変換をとって調べるとわかるように，左辺がもし $T$ 積で定義されていたとするとその時間微分からは現われることができない．したがって，右辺のこの項は左辺を $T$ 積に変えるときにその項に吸収されることになる．他方，$\delta$ 関数の空間微分は右辺に現われても $T$ 積の定義と矛盾しないので，(10.4.13)の第一の式のようにそのまま残ることになる．なお，$\partial_\mu \langle T j^{a\mu}(x) j^{b1}(y)\rangle$ を含む式は第 6 章で議論した後藤-今村-Schwinger 項を含み複雑になるが，ていねいな分析をすれば，(10.4.13)の第一の等式と同等な結果を与える．

このようにして，$j^{b1}(y) = i j_5^{b2}(y)$ および $j_5^{c1}(x) = i j^{c2}(x)$ を考慮し，自由な Fermi 粒子に対しては $\partial_\mu j^{a\mu} = \partial_\mu j_5^{a\mu} = 0$ が成立し，さらに $T$ 積に時間微分が作用すると $\delta$ 関数に変わることを用いると，恒等式(10.4.13)は演算子の言葉で

$$\begin{aligned}
&[j_5^{a2}(x), j^{b2}(y)]\delta(x^2-y^2) + f^{abc} j_5^{c2}(x)\delta^{(2)}(x-y) = \frac{i\delta_{ab}}{2\pi}\partial_1 \delta^{(2)}(x-y),\\
&[j_5^{a2}(x), j_5^{b2}(y)]\delta(x^2-y^2) + f^{abc} j^{c2}(x)\delta^{(2)}(x-y) = 0,\\
&[j^{a2}(x), j^{b2}(y)]\delta(x^2-y^2) + f^{abc} j^{c2}(x)\delta^{(2)}(x-y) = 0
\end{aligned} \tag{10.4.15}$$

にまとめられる．

ここで，

$$j_L^{a2}(x) = \frac{1}{2}[j^{a2}(x) - j_5^{a2}(x)], \quad j_R^{a2}(x) = \frac{1}{2}[j^{a2}(x) + j_5^{a2}(x)] \tag{10.4.16}$$

を定義すると，(10.4.15)は同時刻交換関係

$$\begin{aligned}
&[j_L^{a2}(x), j_L^{b2}(y)] = -f^{abc} j_L^{c2}(x)\delta(x^1-y^1) - \frac{i\delta_{ab}}{4\pi}\partial_1 \delta(x^1-y^1),\\
&[j_R^{a2}(x), j_R^{b2}(y)] = -f^{abc} j_R^{c2}(x)\delta(x^1-y^1) + \frac{i\delta_{ab}}{4\pi}\partial_1 \delta(x^1-y^1)
\end{aligned} \tag{10.4.17}$$

を与える．この関係式を半径 1 のシリンダーの表面

$$-\infty < x^2 < \infty, \quad -\pi \leqq x^1 \leqq \pi \tag{10.4.18}$$

で定義された場の理論の関係式と理解し，例えば，(10.4.17)の第一式で

$$ij_n^a \equiv \int_{-\pi}^{\pi} dx^1 e^{inx^1} j_L^{a2}(x) \tag{10.4.19}$$

のように定義すると

$$[j_n^a, j_m^b] = if^{abc} j_{n+m}^c + \frac{n}{2}\delta_{ab}\delta_{n+m,0} \tag{10.4.20}$$

が得られ，これは Kac-Moody 代数と呼ばれている．最後の $c$ 数の項は中心拡大(central extension)を与える．

**共形場の理論の手法**

これまでの結果を共形場の理論と比較するために，以下では Euclid 理論で

$$\begin{aligned} &z \equiv \frac{x^1 + ix^2}{2}, \quad \bar{z} \equiv \frac{x^1 - ix^2}{2}, \\ &\partial_z = \partial_1 - i\partial_2, \quad \partial_z z = 1, \quad \partial_z \bar{z} = 0, \\ &\partial_{\bar{z}} = \partial_1 + i\partial_2 \end{aligned} \tag{10.4.21}$$

という複素座標を定義する．さらに，現在用いている座標は実は 2 次元のシリンダーの座標 $(\zeta^1, \zeta^2)$ から

$$x^1 + ix^2 = \exp[-i(\zeta^1 + i\zeta^2)] = \exp[-i\zeta^1 + \zeta^2] \tag{10.4.22}$$

により，2 次元面全体に射影された座標であると理解する．このときには，$\zeta^2 = -\infty$ は原点に移され，$\zeta^2 = \infty$ は無限遠点に移され，$z$ 面では時間発展は原点から放射状に出る半径方向に時計が進むことになり，空間の自由度は同心円上にあることになる(これは，radial quantization と呼ばれる)．図 10.1 参照．したがって，場の変数 $\psi(x)$ などもシリンダーの変数から変換されたものであり，(素朴な 2 次元面上の理論とは)定義式は一般に異なっている．

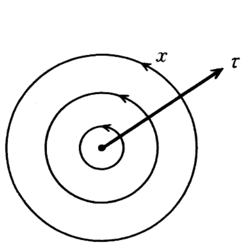



**図 10.1**　複素 $z$ 面での時間と空間座標

一般のベクトルに対しては

$$
\begin{aligned}
&A^z = \frac{A^1 + iA^2}{2}, \quad A^{\bar{z}} = \frac{A^1 - iA^2}{2}, \\
&A_z = A_1 - iA_2, \quad A_{\bar{z}} = A_1 + iA_2, \\
&AB = A^\mu B_\mu = -(A_1B_1 + A_2B_2) = \eta^{z\bar{z}} A_z B_{\bar{z}} + \eta^{\bar{z}z} A_{\bar{z}} B_z \\
&\eta^{z\bar{z}} = \eta^{\bar{z}z} = -\frac{1}{2}, \quad \eta^{zz} = \eta^{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad \eta_{z\bar{z}} = \eta_{\bar{z}z} = -2 \\
&\epsilon^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A_1B_2 - A_2B_1 = \epsilon^{z\bar{z}} A_z B_{\bar{z}} + \epsilon^{\bar{z}z} A_z B_{\bar{z}}, \\
&\epsilon^{z\bar{z}} = -\frac{i}{2} = -\epsilon^{\bar{z}z}
\end{aligned}
\tag{10.4.23}
$$

を定義する．

Dirac 行列に対しては

$$
\gamma^2 = i\gamma^0 = i\sigma^1, \quad \gamma^1 = i\sigma^2, \quad \gamma_5 \equiv (-i)\gamma^1\gamma^2 = i\sigma^2\sigma^1 = \sigma^3 \tag{10.4.24}
$$

を考慮すると，Fermi 粒子のカレントは

$$
\begin{aligned}
j^{a\bar{z}}(x) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}T^a(\gamma^1 - i\gamma^2)\psi = \psi^\dagger \frac{1-\sigma_3}{2} T^a \psi \\
&\equiv \psi_2^\dagger(x) T^a \psi_2(x) = -ij_L^{a2}, \\
j^{az}(x) &= \frac{1}{2}\bar{\psi}T^a(\gamma^1 + i\gamma^2)\psi = -\psi^\dagger \frac{1+\sigma_3}{2} T^a \psi \\
&\equiv -\psi_1^\dagger(x) T^a \psi_1(x) = ij_R^{a2}
\end{aligned}
\tag{10.4.25}
$$

のように書くことができる．ただし $\psi_1, \psi_2$ はそれぞれスピノール $\psi(x)$ の第 1 および第 2 成分である．2 次元理論の特徴として軸性カレントとベクトルカレントは直接関係しており，

$$
\begin{aligned}
j_5^{a\bar{z}}(x) &\equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}T^a(\gamma^1 - i\gamma^2)\gamma_5\psi = -j^{a\bar{z}}(x), \\
j_5^{az}(x) &\equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}T^a(\gamma^1 + i\gamma^2)\gamma_5\psi = j^{az}(x)
\end{aligned}
\tag{10.4.26}
$$

が成立する．

この記法を用いると，$j_5^{a\mu}$ および $j^{a\mu}$ に対する恒等式(10.4.9)と(10.4.10)は($\epsilon^{z\bar{z}} = -i/2$ を用いて)

$$
\begin{aligned}
&-\partial_{\bar z}\langle T^* j^{a\bar z}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle + \partial_z\langle T^* j^{az}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle \\
&\quad = f^{abc}\langle j^{c\bar z}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) + \frac{\delta_{ab}}{4\pi}\partial_z \delta^{(2)}(x-y), \\
&\partial_{\bar z}\langle T^* j^{a\bar z}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle + \partial_z\langle T^* j^{az}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle \\
&\quad = -f^{abc}\langle j^{c\bar z}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y)
\end{aligned}
\tag{10.4.27}
$$

のように書かれ，これらの2つの恒等式の和と差を考えることにより

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\bar z}\langle T^* j^{a\bar z}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle + f^{abc}\langle j^{c\bar z}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) = -\frac{1}{8\pi}\delta_{ab}\partial_z \delta^{(2)}(x-y), \\
&\partial_z\langle T^* j^{az}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle = \frac{1}{8\pi}\delta_{ab}\partial_z \delta^{(2)}(x-y)
\end{aligned}
\tag{10.4.28}
$$

が得られる．

現在の問題にBJL処方を適用すると，恒等式(10.4.28)は

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\bar z}\langle T j^{a\bar z}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle + f^{abc}\langle j^{c\bar z}(x)\rangle \delta^{(2)}(x-y) = -\frac{1}{8\pi}\delta_{ab}\partial_z \delta^{(2)}(x-y), \\
&\partial_z\langle T j^{az}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle = 0
\end{aligned}
\tag{10.4.29}
$$

と書かれる．第一の恒等式では $\bar z$ を時間座標と見なして，右辺には運動量表示で $\bar z$ に共役な運動量を無限大にしたときに発散する項がないことから直接 $T$ 積に移行した．第二の恒等式では $z$ を時間座標と見なし，右辺に $\delta$ 関数の時間微分が現われるので右辺を左辺の時間順序積に含めて $T$ 積を定義した．

この場の理論的な恒等式を演算子積の展開と直接結びつけるには，(10.4.35)で説明する $\partial_{\bar z}\dfrac{1}{4\pi(z-w)} = \delta^2(x-y)$ を用いて恒等式(10.4.29)の第一式を

$$
\partial_{\bar z}\left[\langle T j^{a\bar z}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle + f^{abc}\langle j^{c\bar z}(x)\rangle \frac{1}{4\pi(z-w)} + \frac{1}{8\pi}\delta_{ab}\partial_z \frac{1}{4\pi(z-w)}\right] = 0
\tag{10.4.30}
$$

と書く．ただし，自由なFermi粒子に対しては $\partial_{\bar z} j^{c\bar z}(x) = \partial_z j^{cz}(x) = 0$ が成立することを用いた．一般に $\partial_{\bar z}F(z,\bar z) = 0$ が成立するということは，$F(z,\bar z)$ は $\bar z$ に依存せず，また $F(z,\bar z)$ は $z$ に関して極(pole)を持たないことを意味する．したがって，極の構造が等しいという関係式

$$
\langle T j^{a\bar z}(x) j^{b\bar z}(y)\rangle \sim -f^{abc}\langle j^{c\bar z}(x)\rangle \frac{1}{4\pi(z-w)} + \frac{1}{8\pi}\delta_{ab}\frac{1}{4\pi(z-w)^2}
\tag{10.4.31}
$$

および

$$\langle Tj^{az}(x)j^{b\bar{z}}(y)\rangle \sim 0 \tag{10.4.32}$$

が成立する.

他方，共形場の理論では Euclid 化されたラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\psi_1^\dagger(\partial_2 + i\partial_1)\psi_1 - \psi_2^\dagger(\partial_2 - i\partial_1)\psi_2 \\ &= -i\psi_1^\dagger\partial_z\psi_1 + i\psi_2^\dagger\partial_{\bar{z}}\psi_2\end{aligned} \tag{10.4.33}$$

を考える.

Euclid 理論で複素座標 $z = (x^1 + ix^2)/2$, $w = (y^1 + iy^2)/2$ を用いると Green 関数 $G(x-y)$ の定義式

$$\begin{gathered}\partial_z\partial_{\bar{z}}G(x-y) = \Delta G(x-y) = \delta^2(x-y), \\ \int \vec{\nabla}\vec{\nabla}Gd^2x = \int(\vec{\nabla}G)_n ds = \int(\vec{\nabla}G)_r r d\varphi = 1\end{gathered} \tag{10.4.34}$$

から，境界のない 2 次元面に対する Green 関数

$$\begin{gathered}G(x-y) = \frac{1}{2\pi}\ln r = \frac{1}{4\pi}\ln r^2 = \frac{1}{4\pi}\ln 4(z-w)(\bar{z}-\bar{w}), \\ \Delta G = \partial_{\bar{z}}\partial_z G = \partial_{\bar{z}}\frac{1}{4\pi(z-w)} = \delta^2(x-y)\end{gathered} \tag{10.4.35}$$

が得られる.

このとき(10.4.33)を用いて(10.4.35)を考慮すると

$$\begin{aligned}\langle T\psi_2(z)\psi_2^\dagger(w)\rangle &\equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\psi_2(z)\psi_2^\dagger(w)\exp\left[\int d^2x\mathcal{L}\right] \\ &= -\frac{1}{i\partial_{\bar{z}}}\delta^{(2)}(x-y) = i\frac{1}{4\pi(z-w)}\end{aligned} \tag{10.4.36}$$

が成立する.

(10.4.36)で $w$ の周りで $z$ に関して無限小の半径の線積分を考えると

$$\oint_w dz\langle T\psi_2(z)\psi_2^\dagger(w)\rangle = -\frac{1}{2}. \tag{10.4.37}$$

この式で，相関関数は $z = w$ の点でのみ特異点を持つことを考慮すると積分路

を時刻 $|z| = |w| \pm \epsilon$ の円周に沿った線積分の差に変形でき*1，Grassmann 数の反交換関係を考慮すると，$\epsilon \to 0$ では

$$\left\{ -2 \oint_{|z|=|w|} dz \psi_2(z), \psi_2^\dagger(w) \right\} = 1 \qquad (10.4.38)$$

という Fermi 粒子の正準量子化条件(の一部)を与える．

この性質は一般に任意の 2 つの演算子 $A(x)$ と $B(y)$ に対して

$$\oint_w dz f(z) \langle T A(z) B(w) \rangle = [\oint_{|z|=|w|} dz f(z) A(z), B(w)]_\pm \qquad (10.4.39)$$

として定式化される．$\pm$ は Fermi あるいは Bose 統計を表す．ここで $f(z)$ は $z=0$ と $z=\infty$ 以外に特異点を持たないテスト関数である．すなわち 2 つの演算子積の展開(OPE, operator product expansion)で特異点(pole)の構造がすべて分かれば，同時刻交換関係のすべての情報が得られることになる．

ここでカレントの代数関係にもどって

$$j^{a\bar{z}}(x) \equiv \psi_2^\dagger(x) T^a \psi_2(x) \qquad (10.4.40)$$

を想起して，$\langle T^* \psi_2(z) \psi_2^\dagger(w) \rangle = i/(4\pi(z-w))$ を用いると，可能な組み合わせ $\langle \psi_2(x) \psi_2^\dagger(y) \rangle$ をすべて勘定して演算子積の展開

$$\begin{aligned} T j^{\bar{z}a}(z) j^{\bar{w}b}(w) &\sim \psi_2^\dagger(z) T^a T^b \psi_2(w) i \frac{1}{4\pi(z-w)} + \psi_2^\dagger(w) T^b T^a \psi_2(z) i \frac{1}{4\pi(w-z)} \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\delta_{ab}}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \\ &\sim -f^{abc} \psi_2^\dagger(w) T^c \psi_2(w) \frac{1}{4\pi(z-w)} + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\delta_{ab}}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \end{aligned} \qquad (10.4.41)$$

が得られ，場の理論的な恒等式(10.4.31)と最後の $c$ 数の項を含めて一致する．ここで $\sim$ は両辺の極の構造が等しいという意味である．テスト関数 $f(z)$ を掛けて線積分を行うと

$$[2 \oint_{|z|=|w|} dz f(z) j^{\bar{z}a}(z), j^{\bar{w}b}(w)] = i f^{abc} f(w) j^{\bar{w}c}(w) - \frac{i\delta_{ab}}{8\pi} \partial_w f(w) \qquad (10.4.42)$$

*1　模式的には，$\oint_w dz = \int_{|z|=|w|+\epsilon} dz - \int_{|z|=|w|-\epsilon} dz$ と書かれる．

が成立する.

あるいは $f(z)=z^n$ に選んで

$$j^a_n = 2\oint j^{\bar{z}a}(z)z^n \tag{10.4.43}$$

を定義して, (10.4.42)に $w^m$ を乗じて原点の周りで線積分したものと組み合わせると, 最終的に Kac-Moody 代数(10.4.20)

$$[j^a_n, j^b_m] = if^{abc}j^c_{n+m} + \frac{n\delta_{ab}}{2}\delta_{n,-m} \tag{10.4.44}$$

が得られる.

**Virasoro 代数**

Euclid 化した 2 次元の曲がった空間でのスカラー場 $X(x)$ の理論

$$S_E = \int d^2x\sqrt{g}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu X\partial_\nu X \tag{10.4.45}$$

を考えると, 作用は Weyl 変換

$$g^{\mu\nu}(x) \to e^{2\alpha(x)}g^{\mu\nu}(x), \quad g_{\mu\nu}(x) \to e^{-2\alpha(x)}g_{\mu\nu}(x), \quad X(x) \to X(x) \tag{10.4.46}$$

の下で不変である. $X(x)$ は Weyl 変換を受けないので, Weyl 不変な測度は $X(x)$ で定義され, 経路積分は

$$\int \mathcal{D}X \exp\left[\int d^2x\sqrt{g}\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu X\partial_\nu X\right] \tag{10.4.47}$$

で与えられる.

測度を確定するために

$$D^\mu D_\mu \varphi_n(x) = \lambda_n^2\varphi_n(x), \quad \int d^2x\sqrt{g}\varphi_n(x)\varphi_m(x) = \delta_{nm} \tag{10.4.48}$$

を定義して

$$X(x) = \sum_n a_n\varphi_n(x) \tag{10.4.49}$$

のように展開する. このとき

$$\mathcal{D}X \equiv \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n \tag{10.4.50}$$

で与えられる．あるいは $\tilde{\varphi}_n(x) = (g)^{1/4}\varphi_n(x)$ を定義すると

$$[(g)^{1/4} D^\mu D_\mu (g)^{-1/4}]\tilde{\varphi}_n(x) = \lambda_n^2 \tilde{\varphi}_n(x), \quad \int d^2x \tilde{\varphi}_n(x)\tilde{\varphi}_m(x) = \delta_{nm} \tag{10.4.51}$$

が成立する．

一般座標変換

$$\begin{aligned} X'(x) &= X(x) + \xi^\mu \partial_\mu X(x), \\ g'^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + [D^\mu \xi^\nu + D^\nu \xi^\mu] \end{aligned} \tag{10.4.52}$$

に対する恒等式は，これまでの他の変換に対すると同様に

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}X' \exp\,[\int d^2x \sqrt{g'} \frac{1}{2} g'^{\mu\nu} \partial_\mu X' \partial_\nu X'] \\ &= \int \mathcal{D}X \exp\,[\int d^2x \sqrt{g'} \frac{1}{2} g'^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X] \\ &= \int \mathcal{D}X J(\xi) \exp\,[\int d^2x \sqrt{g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu X \partial_\nu X] \end{aligned} \tag{10.4.53}$$

から導かれる．第一の等式は積分変数の名前には積分は変わらないという事実を表し，最後の式は最初の式で作用が一般座標変換で不変であることと測度でヤコビアンを計算して得られる．こうして恒等式は最後の2つの式を比較して

$$-\int d^2x \xi^\nu(x) \langle D^\mu T_{\mu\nu}(x) \rangle = \ln J(\xi) \tag{10.4.54}$$

のように書かれる．エネルギー運動量テンソルは積分変数 $X(x)$ を固定して

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \partial_\mu X \partial_\nu X - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\mu X \partial^\mu X \tag{10.4.55}$$

で定義した．こうして定義された $T_{\mu\nu}$ は($d=2$ では)恒等的に

$$T^\mu_\mu(x) = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}(x) = 0 \tag{10.4.56}$$

を満たす．またヤコビアンは

$$
\begin{aligned}
&\ln J(\xi)\\
&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int d^2x\sqrt{g}\xi^\nu\varphi_n(x)\partial_\nu\varphi_n(x)\\
&=\lim_{M\to\infty}\int d^2x\sqrt{g}\xi^\nu\frac{1}{2}\partial_\nu\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_n(g)^{1/4}\varphi_n(x)\exp\left[-\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right](g)^{1/4}\varphi_n(x)\right\}\\
&=\lim_{M\to\infty}\int d^2x\sqrt{g}\xi^\nu\frac{1}{2}\partial_\nu\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_n\tilde{\varphi}_n(x)\exp\left[-\frac{(g)^{1/4}D^\mu D_\mu(g)^{-1/4}}{M^2}\right]\tilde{\varphi}_n(x)\right\}\\
&=\int d^2x\sqrt{g}\xi^\nu\frac{1}{2}\partial_\nu(R/24\pi)
\end{aligned}
\tag{10.4.57}
$$

のように計算される．共形ゲージ $g_{\mu\nu}=\rho(x)\eta_{\mu\nu}$ では $(g)^{1/4}D^\mu D_\mu(g)^{-1/4}=(1/\sqrt{\rho})\partial_\mu\partial^\mu(1/\sqrt{\rho})$ となり，第 7 章 6 節のスカラー場の Weyl 量子異常の計算と同じになるからである．一般の $d$ 個のスカラー場 $X^a(x)$ を含む理論では異常項は $d$ 倍される．

このようにして，恒等式は

$$\int \mathcal{D}XD^\mu T_{\mu\nu}(x)e^S=\langle D^\mu T_{\mu\nu}(x)\rangle=-\frac{1}{48\pi}\partial_\nu R(x) \tag{10.4.58}$$

と書かれる．ここで共変微分は付録 B にあるアフィン接続 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を用いて

$$D^\mu T_{\mu\nu}=g^{\alpha\mu}[\partial_\alpha T_{\mu\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\alpha}T_{\rho\nu}-\Gamma^\rho_{\nu\alpha}T_{\mu\rho}] \tag{10.4.59}$$

のように与えられる．

つぎに $T_{\mu\nu}$ の相関関数を求めるために，$\epsilon^{\mu\nu}(x)$ を無限小量として

$$g^{\mu\nu}\equiv\eta^{\mu\nu}+\epsilon^{\mu\nu}(x),\quad g_{\mu\nu}\equiv\eta_{\mu\nu}-\epsilon_{\mu\nu}(x) \tag{10.4.60}$$

と書く．ただし，$\epsilon^{\mu\nu}(x)$ は対称で $\eta_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}(x)=0$ とする．このとき $\epsilon^{\mu\nu}(x)$ の 1 次の精度で $\det g=1$ である．同じ 1 次の精度で展開すると

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{(-1)}{2}[\partial_\mu\epsilon_\nu{}^\lambda+\partial_\nu\epsilon_\mu{}^\lambda-\partial^\lambda\epsilon_{\mu\nu}] \tag{10.4.61}$$

で与えられ，またエネルギー運動量テンソル(10.4.55)自身の展開

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}&=T^{(0)}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X\\
&=T^{(0)}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X\partial_\beta X-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta}T^{(0)}_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{10.4.62}
$$

に注意する．ここで $T^{(0)}_{\mu\nu}$ は $\epsilon_{\mu\nu}(x)$ に関して 0 次の量である．このとき

$$D^\mu T_{\mu\nu} = \eta^{\lambda\mu}\partial_\lambda T^{(0)}_{\mu\nu} + \epsilon^{\lambda\mu}\partial_\lambda T^{(0)}_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon^{\mu\rho} T^{(0)}_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\rho}\partial_\nu T^{(0)\lambda\rho} + \eta_{\rho\nu}\frac{1}{2}\partial_\lambda[\epsilon^{\lambda\rho}\partial_\kappa X \partial^\kappa X] \qquad (10.4.63)$$

と書ける．この式から（右辺の $T^{(0)}_{\mu\nu}$ を単に $T_{\mu\nu}$ と書いて）

$$\frac{\delta}{\delta\epsilon^{\alpha\beta}(y)} D^\mu T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\partial^\mu[\delta(x-y)\eta_{\alpha\mu}T_{\beta\nu} + \delta(x-y)\eta_{\beta\mu}T_{\alpha\nu}] - \frac{1}{2}\delta(x-y)\partial_\nu T_{\alpha\beta} + \eta_{\beta\nu}\frac{1}{2}\partial_\alpha[\delta(x-y)\partial_\kappa X \partial^\kappa X] \qquad (10.4.64)$$

が得られる．以下の式ではすべての $T_{\mu\nu}$ は 0 次の量を表すことにする．また付録 B で説明したアフィン接続 $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ を用いて計算した Riemann–Christoffel の曲率テンソルおよび定義式 $R_{\rho\nu} \equiv R^\alpha{}_{\rho\alpha\nu}$，$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ に注意すると

$$R(x) = -\partial_\mu\partial_\rho\epsilon^{\mu\rho}(x) \qquad (10.4.65)$$

が成立する．

ここで恒等式 $\langle D^\mu T_{\mu\nu}(x)\rangle = -\frac{1}{48\pi}\partial_\nu R(x)$ の両辺を $\epsilon^{\alpha\beta}(y)$ で関数微分し，経路積分の作用の微分から $T_{\alpha\beta}(y)$ が出ることを考慮すると，関数微分の後に平坦な空間（$\epsilon^{\mu\nu}(x)=0$）を考えて（(10.4.64) を用いて）

$$\begin{aligned}\partial^\mu_x\langle T^* T_{\mu\nu}(x)T_{\alpha\beta}(y)\rangle = {}& \delta^{(2)}(x-y)\partial_\nu T_{\alpha\beta}(x) \\ & -\partial_\alpha[\delta^{(2)}(x-y)T_{\beta\nu}(x)] - \partial_\beta[\delta^{(2)}(x-y)T_{\alpha\nu}(x)] \\ & +\eta_{\alpha\beta}\partial^\lambda[\delta^{(2)}(x-y)T_{\lambda\nu}(x)] \\ & -\partial^\mu[(\eta_{\beta\nu}\eta_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu})\delta^{(2)}(x-y)\partial_\kappa X\partial^\kappa X] \\ & +\frac{1}{24\pi}\partial_\nu[\partial_\alpha\partial_\beta - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\lambda\partial^\lambda]\delta^{(2)}(x-y)\end{aligned} \qquad (10.4.66)$$

が得られる．

ここで複素座標 $z \equiv (x^1+ix^2)/2$，$\bar{z} \equiv (x^1-ix^2)/2$ では 2 階のテンソルは一般に

$$A^{zw} = \frac{1}{4}[A^{11} + iA^{12} + iA^{21} - A^{22}],$$
$$A_{zw} = [A_{11} - iA_{12} - iA_{21} - A_{22}],$$
$$A^{z\bar{z}} = \frac{1}{4}[A^{11} - iA^{12} + iA^{21} + A^{22}],$$

$$
\begin{aligned}
&A_{z\bar{z}} = A_{11} + iA_{12} - iA_{21} + A_{22},\\
&A_{z\bar{z}} + A_{\bar{z}z} = 2(A_{11} + A_{22}) = -2A^{\mu}_{\mu},\\
&A^{z\bar{z}} + A^{\bar{z}z} = \frac{1}{2}(A^{11} + A^{22}) = -\frac{1}{2}A^{\mu}_{\mu},\\
&A^{\mu\nu}B_{\mu\nu} = A^{zw}B_{zw} + A^{z\bar{w}}B_{z\bar{w}} + A^{\bar{z}w}B_{\bar{z}w} + A^{\bar{z}\bar{w}}B_{\bar{z}\bar{w}},\\
&\eta^{z\bar{z}} = \eta^{\bar{z}z} = -\frac{1}{2}, \quad \eta^{zz} = \eta^{\bar{z}\bar{z}} = 0
\end{aligned}
\tag{10.4.67}
$$

のように書けることに注意する．

複素表示では，$T_{\mu\nu}$ のトレースが 0 という性質は

$$
T^{\mu}_{\mu} = -\frac{1}{2}T_{z\bar{z}} - \frac{1}{2}T_{\bar{z}z} = -T_{z\bar{z}} = 0 \tag{10.4.68}
$$

と書かれ，0 にならない成分は $T_{zz} = \partial_z X \partial_z X$ および $T_{\bar{z}\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} X \partial_{\bar{z}} X$ で与えられ，これらは平坦な空間では

$$
\partial_{\bar{z}} T_{zz} = \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{10.4.69}
$$

を満たす．

上記の $T_{\mu\nu}$ の相関関数を含む恒等式(10.4.66)は複素表示では，$\nu = z$, $\alpha = \beta = w$ として

$$
\begin{aligned}
\partial^z_x \langle TT_{zz}(x)T_{ww}(y)\rangle \;=\;& \delta^{(2)}(x-y)\partial_z T_{zz}(x) - 2\partial_z[\delta^{(2)}(x-y)T_{zz}(x)]\\
&+\frac{1}{24\pi}\partial^3_z \delta^{(2)}(x-y)
\end{aligned}
\tag{10.4.70}
$$

のように書かれる．ここで $\partial^z T_{zz} = -\dfrac{1}{2}\partial_{\bar{z}} T_{zz}$ に注意して，$\bar{z}$ を時間，$z$ を座標と理解すると右辺に時間微分が現われず，正しい $T$ 積の定義を与えていることがわかる．恒等式(10.4.70)で $\delta$ 関数のところで(10.4.35)の

$$
\delta^{(2)}(x-y) = \partial_{\bar{z}} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{z-w} \tag{10.4.71}
$$

を用いて，左右両辺から $\partial_{\bar{z}}$ を取り去った式を書くと

$$
\begin{aligned}
\langle TT_{zz}(x)T_{ww}(y)\rangle \;\sim\;& -2\frac{1}{4\pi}\frac{1}{z-w}\partial_z T_{zz}(x) + 4\partial_z[\frac{1}{4\pi}\frac{1}{z-w}T_{zz}(x)]\\
&-\frac{d}{12\pi}\partial^3_z \frac{1}{4\pi}\frac{1}{z-w}
\end{aligned}
$$

$$\sim \ -2\frac{1}{4\pi}\frac{1}{z-w}\partial_w T_{ww}(y) - 4\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(z-w)^2}T_{ww}(y) + \frac{d}{8\pi^2}\frac{1}{(z-w)^4} \tag{10.4.72}$$

という極(pole)の構造を示す等式が得られる．ただし，最後の式では一般に $d$ 個のスカラー関数 $X^a(x)$ を含む理論に対する結果を与えた．この式が場の理論で量子異常を含む恒等式から得られ，共形場の理論の演算子積の展開に対応する関係式である．特に最後の $c$ 数の項は，Weyl 不変性を強制したときに現われる一般座標変換に対する量子異常から来ていることが重要である．

他方，共形場の理論では経路積分

$$\int \mathcal{D}X \exp\left[\frac{1}{2}\int X\partial_z\partial_{\bar z}X d^2x\right] \tag{10.4.73}$$

から(10.4.35)を考慮して相関関数

$$\langle T^* X(x)X(y)\rangle = \frac{(-1)}{\partial_z\partial_{\bar z}}\delta^{(2)}(x-y) = -\frac{1}{4\pi}\ln 4(z-w)(\bar z-\bar w) \tag{10.4.74}$$

が得られ，したがって

$$\langle T^*\partial_z X(z)\partial_w X(w)\rangle = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(z-w)^2} \tag{10.4.75}$$

が成立する．またトレース $T_{z\bar z}=0$ のエネルギー運動量テンソルは

$$T_{zz} = \partial_z X\partial_z X \tag{10.4.76}$$

あるいは $T_{\bar z\bar z}$ で与えられ，エネルギー運動量テンソルの演算子積は

$$\begin{aligned} TT_{zz}T_{ww} &\sim 4\frac{-1}{4\pi}\frac{1}{(z-w)^2}\partial_z X(z)\partial_w X(w) + 2\left[\frac{-1}{4\pi}\frac{1}{(z-w)^2}\right]^2 \\ &\sim \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{(z-w)^2}[2\partial_w T_{ww}(z-w) + 4T_{ww}] + \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{(z-w)^4} \\ &\sim \frac{-2}{4\pi}\frac{1}{(z-w)}\partial_w T_{ww} + \frac{-4}{4\pi}\frac{1}{(z-w)^2}T_{ww} + \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{(z-w)^4} \end{aligned} \tag{10.4.77}$$

のように計算される．この式は，最後の $c$ 数の異常項を含めて場の理論的に求めた恒等式(10.4.72)と一致している．

この演算子積の計算から得られた恒等式にテスト関数 $\xi^z(x)$ を乗じて，変数

$z$ に関して $w$ の周りの無限小の円に沿って線積分すると

$$[\oint_{|z|=|w|} dz\xi^z(x)T_{zz}(x), T_{ww}(y)] = -i\xi^w(y)\partial_w T_{ww}(y) - 2i\partial_w \xi^w(y)T_{ww}(y) + i\frac{1}{24\pi}\partial_w^3\xi^w(y) \qquad (10.4.78)$$

が得られる．$\xi^z(x) = z^{n+1}$ に選んで

$$L_n = -\oint dz T_{zz} z^{n+1} \qquad (10.4.79)$$

を定義して，(10.4.78)に $w^{m+1}$ を乗じて積分することにより Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = i(n-m)L_{m+n+1} + \frac{n^3-n}{12}\delta_{m+n,0} \qquad (10.4.80)$$

が得られる．最後の項は中心拡大(central extension)を表す．

現在の考察で基本的なことは，Kac–Moody 代数および Virasoro 代数の中心拡大は，カイラル量子異常および一般座標変換に付随した量子異常の代数的な表現になっていることである．なお，変数 $\tilde{X} = (g)^{1/4}X$ を固定して計量に関して微分して得られる一般座標変換の下で不変なエネルギー運動量テンソル $\tilde{T}_{\mu\nu}$ とトレースが 0 のテンソル $T_{\mu\nu}$ の間には

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2}\langle XD^\alpha\partial_\alpha X\rangle = T_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{48\pi}R \qquad (10.4.81)$$

の関係があり，$D^\mu\tilde{T}_{\mu\nu} = 0$ から $D^\mu T_{\mu\nu} = -(1/48\pi)\partial_\nu R$ が成立する．

## 10.5 弦の量子論と Liouville の作用

この節では，ボソン的な弦の理論の第一量子化の基礎を議論する．弦理論のラグランジアンは，$X^a(x)$, $a = 1 \sim d$, を $d$ 次元 Euclid 空間を運動する弦の座標として

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\mu X^a\partial_\nu X^a \qquad (10.5.1)$$

で与えられ，2 次元の内部座標 $(x^1, x^2) = (\sigma, \tau)$ は弦の空間的な広がりを表すパラメター $\sigma$ と時間方向への広がり(あるいは運動)を記述するパラメター $\tau$ に

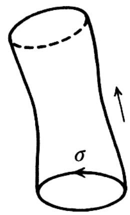



**図 10.2**　閉じた弦の自由な運動

対応する．(図 10.2 参照)．

素朴な意味での弦の第一量子化を与える経路積分は

$$\int \mathcal{D}X^a \mathcal{D}g_{\mu\nu} \exp\left[\int d^2x\mathcal{L}\right] \tag{10.5.2}$$

で定義されるが，この経路積分の注意深い計算を行う．形式的にはこの経路積分は 2 次元の曲がった空間の中を運動する $d$ 個のスカラー場 $X^a(x)$ の理論と同等である．弦理論の特徴的な点は 2 次元の空間が位相的に種々な形を取ることである．円筒のような 2 次元空間の場合は自由に運動する閉じた弦を表し，途中でドーナツのような形を取る場合には場の理論におけるループが一つの高次の量子効果に対応するものを含むことになる．このような一般の穴の開いた空間上での経路積分を遂行することは弦理論の重要なしかし実際は非常に難しい問題である．

ここでは，このような位相的な問題ではなく，量子的な効果(すなわち量子異常に関係した効果)の議論を行う．2 次元の曲がった空間の一般座標変換に関する BRST 不変な経路積分の測度は

$$d\mu = \mathcal{D}((g)^{-1/4}g_{\alpha\beta})\mathcal{D}((g)^{1/4}e^a_\mu c^\mu)\mathcal{D}\bar{c}_\mu\mathcal{D}B_\mu\mathcal{D}((g)^{1/4}X^a) \tag{10.5.3}$$

で与えられる．付録の(B.2.8)参照．

実際の計算は共形座標条件

$$g_{\mu\nu}(x) = \rho(x)\eta_{\mu\nu} \tag{10.5.4}$$

で行う．この座標系では

$$\tilde{X}^a(x) \equiv (g)^{1/4} X^a = \sqrt{\rho} X^a(x),$$
$$\tilde{c}^\mu \equiv (g)^{1/4} e^a_\mu c^\mu = \rho c^\mu(x), \qquad (10.5.5)$$
$$\tilde{g}_{\alpha\beta} \equiv (g)^{-1/4} g_{\alpha\beta} = \sqrt{\rho}\eta_{\alpha\beta}$$

である．共形座標条件は計量の成分で書くと

$$g_{12} = \frac{-i}{4}(g_{\bar{z}\bar{z}} - g_{zz}) = 0,$$
$$\frac{1}{2}(g_{11} - g_{22}) = \frac{1}{4}(g_{\bar{z}\bar{z}} + g_{zz}) = 0 \qquad (10.5.6)$$

となるので，ゲージ条件は

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = iB_1\tilde{g}_{12} + iB_2\frac{1}{2}(\tilde{g}_{11} - \tilde{g}_{22}) = (B_1 + iB_2)\frac{1}{4}\tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}} - (B_1 - iB_2)\frac{1}{4}\tilde{g}_{zz} \qquad (10.5.7)$$

を用いて固定される．したがって，BRST 不変なゲージ固定のラグランジアンは

$$ib_{zz} \equiv \bar{c}_1 + i\bar{c}_2, \quad -ib_{\bar{z}\bar{z}} \equiv \bar{c}_1 - i\bar{c}_2 \qquad (10.5.8)$$

を定義して，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_g \;=\; & \frac{1}{4}(B_1 + iB_2)\tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{1}{4}(B_1 - iB_2)\tilde{g}_{zz} \\
& + \frac{1}{4}b_{zz}[(c^z\partial_z + c^{\bar{z}}\partial_{\bar{z}})\tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}}(x) + 2\partial_{\bar{z}}c^z\tilde{g}_{z\bar{z}}(x) + 2\partial_{\bar{z}}c^{\bar{z}}\tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}}(x) \\
& - \frac{1}{2}(\partial_z c^z + \partial_{\bar{z}}c^{\bar{z}})\tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}}(x)] \\
& + \frac{1}{4}b_{\bar{z}\bar{z}}[(c^z\partial_z + c^{\bar{z}}\partial_{\bar{z}})\tilde{g}_{zz}(x) + 2\partial_z c^z\tilde{g}_{zz}(x) + 2\partial_z c^{\bar{z}}\tilde{g}_{\bar{z}z}(x) \\
& - \frac{1}{2}(\partial_z c^z + \partial_{\bar{z}}c^{\bar{z}})\tilde{g}_{zz}(x)]
\end{aligned} \qquad (10.5.9)$$

で与えられる．ただし付録 B で与えた関係式(B.2.1)から導かれる

$$\begin{aligned}
& g^{-1/4}(x,\theta)g_{\mu\nu}(x,\theta) \\
& = \tilde{g}_{\mu\nu}(x) + i\theta[c^\rho\partial_\rho\tilde{g}_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu c^\rho\tilde{g}_{\rho\nu}(x) + \partial_\nu c^\rho\tilde{g}_{\rho\mu}(x) - \frac{1}{2}\partial_\rho c^\rho\tilde{g}_{\mu\nu}(x)]
\end{aligned} \qquad (10.5.10)$$

を用いた．この式で，例えば $\mu = \nu = z$ とおくと，第 1 項がゲージ固定項の $\tilde{g}_{zz}$ を与え，$\theta$ に比例する項は(10.5.9)の最後の $b_{\bar{z}\bar{z}}$ に比例する項を与える．中

西-Lautrup 場 $B_1, B_2$ に関して積分した後では $\tilde{g}_{zz} = \tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ および $g_{z\bar{z}} = 2\sqrt{\rho}$ となるので，Faddeev-Popov のゴースト場の部分でこのことを用いると

$$\mathcal{L}_g = (B_1 + iB_2)\frac{1}{4}\tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}} - (B_1 - iB_2)\frac{1}{4}\tilde{g}_{zz} + b_{zz}\sqrt{\rho}\partial_{\bar{z}}c^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\sqrt{\rho}\partial_z c^{\bar{z}} \tag{10.5.11}$$

のように簡単化される．

このようにして，弦の量子論は $B_1$，$B_2$，$\tilde{g}_{zz}$，$\tilde{g}_{\bar{z}\bar{z}}$ に関して積分を実行した後に

$$\begin{aligned} Z &= \int d\mu \exp\left[\int d^2x(\mathcal{L} + \mathcal{L}_g)\right] \\ &= \int \mathcal{D}\tilde{X}^a \mathcal{D}\sqrt{\rho}\mathcal{D}b_{zz}\mathcal{D}b_{\bar{z}\bar{z}}\mathcal{D}\tilde{c}^z\mathcal{D}\tilde{c}^{\bar{z}} \\ &\quad \times \exp\left\{\int d^2x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{X}^a\right)\partial^\mu\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{X}^a\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + b_{zz}\sqrt{\rho}\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{\rho}\tilde{c}^z\right) + b_{\bar{z}\bar{z}}\sqrt{\rho}\partial_z\left(\frac{1}{\rho}\tilde{c}^{\bar{z}}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{10.5.12}$$

で与えられる．一般座標変換に付随した BRST 不変性を保つ測度を選んだ結果として，$\rho(x)$ で表される Weyl 自由度が作用に陽に現われたわけである．

この経路積分で $\rho(x) = \exp[\sigma(x)]$ と書くとき

$$\begin{aligned} &\tilde{X}^a(x) \to \exp\left[\frac{1}{2}\sigma(x)\right]\tilde{X}^a(x), \\ &b_{zz}(x) \to \exp\left[\frac{-1}{2}\sigma(x)\right]b_{zz}(x), \quad b_{\bar{z}\bar{z}}(x) \to \exp\left[\frac{-1}{2}\sigma(x)\right]b_{\bar{z}\bar{z}}(x), \\ &\tilde{c}^z(x) \to \exp[\sigma(x)]\tilde{c}^z(x), \quad \tilde{c}^{\bar{z}}(x) \to \exp[\sigma(x)]\tilde{c}^{\bar{z}}(x) \end{aligned} \tag{10.5.13}$$

という変数変換（Weyl 変換）をすると，Weyl 自由度 $\rho(x)$ が他の変数から分離される．この変換に伴う量子異常を計算するための，積分変数を展開する基底をきめるエルミート演算子は（共変量子異常の計算の処方を用いて）

$$\tilde{X}^a(x):\ H = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{\sqrt{\rho}} = -\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_{\bar{z}}\partial_z\frac{1}{\sqrt{\rho}},$$

$$
\begin{aligned}
b_{zz}(x):\ H_b &= -\sqrt{\rho}\partial_z\frac{1}{\rho}\frac{1}{\rho}\partial_{\bar{z}}\sqrt{\rho} = -\sqrt{\rho}\partial_z\frac{1}{\rho^2}\partial_{\bar{z}}\sqrt{\rho},\\
\tilde{c}^z(x):\ H_c &= -\frac{1}{\rho}\partial_z\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}\partial_{\bar{z}}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\partial_z\rho\partial_{\bar{z}}\frac{1}{\rho}
\end{aligned}
\tag{10.5.14}
$$

で与えられる．$b_{\bar{z}\bar{z}}(x)$, $\tilde{c}^{\bar{z}}(x)$ に対する演算子は $H_b$ および $H_c$ で $z$ と $\bar{z}$ を入れ替えたもので与えられるが，Weyl 量子異常はこの入れ替えに対して変わらないことが示される．

これらの演算子は

$$
H_n \equiv -\rho^{-(n+1)/2}\partial_z\rho^n\partial_{\bar{z}}\rho^{-(n+1)/2} \tag{10.5.15}
$$

でパラメター $n$ をそれぞれ $n=0,-2,1$ に選ぶと得られる．したがって Weyl 量子異常の計算の一般形は無限小変換のパラメターを $\alpha(x)$ とするとき

$$
\ln J(\alpha) = \lim_{M\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{-ikx}e^{-\frac{H_n}{M^2}}e^{ikx} \tag{10.5.16}
$$

で与えられる．この計算はすでに(7.6.12)で行ったものに一致し，答えは

$$
\begin{aligned}
\ln J(\alpha) &= \lim_{M\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\frac{1}{4\pi}\left[M^2\rho - \left(\frac{3n+1}{6}\right)\partial_z\partial_{\bar{z}}\ln\rho\right]\\
&= \lim_{M\to\infty}\int d^2x\alpha(x)\frac{1}{4\pi}\left[M^2\sqrt{g} + \left(\frac{3n+1}{6}\right)\sqrt{g}R\right]
\end{aligned}
\tag{10.5.17}
$$

で与えられる．ただし，$R$ をスカラー曲率として $\sqrt{g}=\rho$ および $\sqrt{g}R = \partial_\mu\partial^\mu\ln\rho = -\partial_z\partial_{\bar{z}}\ln\rho$ を用いた．$\sqrt{g}M^2$ の項は，Weyl 量子異常という観点からは適当な宇宙項を相殺項として作用に付け加えておけば除去できる．

変数 $\rho$ の分離に伴う積分されたヤコビアンは，まずある程度 Weyl 変換して $\rho=\exp[(1-s)\sigma]$ としておいてさらに無限小の変換 $ds\sigma$ を行い，これらを積分して((10.5.13)の重みおよび $b$ と $c$ は Grassmann 数であることを考慮すると)

$$
\begin{aligned}
\ln J &= \int d^2x\int_0^1 ds\frac{1}{24\pi}[d\frac{1}{2}(-1) - 2\frac{-1}{2}\times 5 - 2(-4)]\sigma(x)\partial_z\partial_{\bar{z}}\sigma(x)(1-s)\\
&= -\frac{26-d}{48\pi}\int d^2x\frac{1}{2}\partial_z\sigma(x)\partial_{\bar{z}}\sigma(x)
\end{aligned}
\tag{10.5.18}
$$

で与えられ，弦の理論の経路積分は次のようになる

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{X}^a \mathcal{D}\sqrt{\rho}\mathcal{D}b_{zz}\mathcal{D}b_{\bar{z}\bar{z}}\mathcal{D}\tilde{c}^z\mathcal{D}\tilde{c}^{\bar{z}} \times \exp\{\int d^2x[-\partial_z\tilde{X}^a\partial_{\bar{z}}\tilde{X}^a + b_{zz}\partial_{\bar{z}}\tilde{c}^z + b_{\bar{z}\bar{z}}\partial_z\tilde{c}^{\bar{z}}] + S_L\}. \tag{10.5.19}$$

ただし，Liouville の作用と呼ばれるものは

$$S_L \equiv -\frac{26-d}{48\pi}\int d^2x[\frac{1}{2}\partial_z \ln\rho(x)\partial_{\bar{z}}\ln\rho(x) + \mu^2\rho(x)] \tag{10.5.20}$$

で定義される．この $S_L$ の最後の宇宙項に対応する項では，適当な相殺項を加えて，有限な $\mu^2$ という係数に調整した結果を与えてある．

このように弦(正確には Bose 的な弦)の理論は，$d=26$ では Liouville の自由度を無視して定義でき臨界次元での弦と呼ばれている．(ちなみに，Bose 的な自由度と Fermi 的な自由度の数を同じになるように調整した超弦理論では $d=10$ が臨界弦を与える)．他方 $d<26$ での弦は非臨界弦と呼ばれ，Liouville の自由度を取り入れて初めて量子的に矛盾しない BRST 不変な理論が定義できることになる．弦の量子論においては，一般に 2 次元のパラメター空間(これは world sheet と呼ばれ，Riemann 面を与える)を記述する $c$ 数の背景となる計量の中での弦の座標の運動を考えるのが，種数(genus)という位相的な概念を自然に取り入れるのに便利である．2 次元面の計量に対して現在の計算では便宜上 $g_{\mu\nu}(x)=\rho(x)\eta_{\mu\nu}$ のようなゲージを用いて計算したが，一般のゲージに焼きなおすときは

$$g_{\mu\nu}(x) = g^{(B)}_{\mu\nu}(x) + \rho'(x)\eta_{\mu\nu} \tag{10.5.21}$$

のように，位相的な情報を含む背景場 $g^{(B)}_{\mu\nu}(x)$ と共形ゲージで定義された力学的な自由度 $\rho'(x)$ に分離して考察するのが自然である．$X^a(x)$, $b_{zz}(x)$, $c^z(x)$ などの変数も背景場 $g^{(B)}_{\mu\nu}(x)$ の影響を受けていることになる．このときには，$\rho'(x)$ の積分から再びスカラー場の自由度 1 個分の Liouville の作用が誘導され，結果としては Liouville の作用(10.5.20)の前の係数は $(25-d)/48\pi$ になることが予想されるが，実際この値が Liouville 理論を含む量子論ではより自然な結果に導くことが知られている．

## 10.6 ゴースト数の量子的破れと Riemann-Roch の定理

量子異常の問題に戻ると，(10.5.13)において

$$\tilde{c}^z(x) \to e^{\alpha(x)}\tilde{c}^z(x), \quad b_{zz}(x) \to e^{-\alpha(x)}b_{zz}(x) \tag{10.6.1}$$

という無限小変換で定義されるゴースト数の変換に対するヤコビアンは，上記の Weyl 変換の計算を用いて($b_{zz}$ と $c^z$ は Grassmann 数であることを想起すると)

$$\partial_{\bar{z}}[b_{zz}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{c}^z] = \frac{(-1)}{24\pi}[-1\times(-5)+1\times(4)]\sqrt{g}R = \frac{-3}{8\pi}\sqrt{g}R \tag{10.6.2}$$

というゴースト数の異常を含む恒等式に導く．この式を閉じた 2 次元面上で積分して右辺で Gauss-Bonnet の定理を用いると $\chi = 2(1-g)$ を Euler 数として($g$ は種数(genus)を表し，球面は $g=0$，トーラスは $g=1$ である)

$$\int d^2x \left\{\partial_{\bar{z}}[b_{zz}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{c}^z] + \partial_z[b_{\bar{z}\bar{z}}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\tilde{c}^{\bar{z}}]\right\} = \frac{-3}{4\pi}\int d^2x\sqrt{g}R = \frac{-3}{2}\chi \tag{10.6.3}$$

を与え，4 次元の非 Abel 的なゲージ理論に対する Atiyah-Singer の指数定理(5.5.4)と類似の 2 次元での定理に導く．この指数定理は(10.5.14)の演算子を用いて $H_c\varphi_n = \lambda_n^2\varphi_n$，$H_b\phi_n = \lambda_n^2\phi_n$ を定義すると

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty}\int d^2x\sum_n[\varphi_n^\dagger(x)e^{-\frac{\lambda_n^2}{M^2}}\varphi_n(x) - \phi_n^\dagger(x)e^{-\frac{\lambda_n^2}{M^2}}\phi_n(x)] + c.\ c.\\ &= (\text{No. of zero modes of } c) - (\text{No. of zero modes of } b) = \frac{3}{2}\chi\end{aligned} \tag{10.6.4}$$

を表しており，Riemann 面の理論での Riemann-Roch の定理に対応していることが知られている．すなわち Riemann-Roch の定理は場の理論(あるいは弦の理論)ではゴースト数の量子異常として理解される．

# 11

# おわりに

本書では，対称性の量子的破れの基本的な考えとその応用を議論してきた．量子異常は 3 角形の Feynman 図の詳細な分析で発見された．この意味で 4 次元の時空間では 3 角形の Feynman 図は特別な意味を持つと言える($d = 2n$ 次元では $n + 1$ 角形になる)．本書では，知られているすべての量子異常は経路積分では積分変数の変換に伴うヤコビアンとして定式化できることを説明した．この立場からは量子異常とは何かという問いに対する回答に少し近づいたと言える．とくに最近格子ゲージ理論で，カイラル量子異常が変数変換に伴うヤコビアンとして定式化されたことは，この見方に強い支持を与えている．他方，演算子形式では量子異常は異常交換関係(あるいは，交換関係の中心拡大)として特徴づけられることを説明した．

このようにして，対称性の量子的破れはいろいろな特徴づけが可能であることがわかった．それでは，もっと直感的初歩的な特徴づけはできないのだろうかという疑問が起こるのは自然である．以下で，このような特徴づけを簡単に議論したい．

まず，量子異常は素朴な意味では発散と密接に関係しているが，注意深い分析を行うと発散とは無関係であることを説明した．この意味で無限大の自由度が基本的であるといえる．例えば，カイラル量子異常は $\gamma_5$ を対角的にする表示では

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.1.1}$$

のように書け，素朴な相互作用表示では

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = 1+1-1-1+1+1-1\cdots \tag{11.1.2}$$

という振動する無限級数を扱うことになる．この無限級数は足し上げ方により答えが一般に変わる．本書で定式化した量子異常の計算ではこの級数を

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_5 = \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x) \tag{11.1.3}$$

のように，基底 $\{\varphi_n(x)\}$ を用いて計算していることになる．すなわち，振動する級数にある定まった値を与えるのにこの基底が基本的な役割を担っている．発散と収束の微妙な境界に量子異常が位置していることがわかる．有限級数では和は一意的に与えられ，このような自由度は一般に現われず，したがって量子異常は無限自由度と密接に関連していることがわかる．第3章で議論した光の位相演算子でも Bose 粒子の生成演算子で張られる空間が無限次元であるために，指数という概念が現われ，有用な情報を与えることを説明した．

もう一つの量子異常の基礎的な特徴としては，例えば，カイラル量子異常では，ゲージ対称性とカイラル対称性の競合が見られ，また Weyl 量子異常ではゲージ対称性(これには，一般座標変換も含まれる)と Weyl 対称性の競合が見られた．これは，ある種の“不確定性関係”を想起させるものである．例えば，$\gamma_5$ と $\not{D}$ が同時に対角化できないことが，カイラル量子異常の出現に深く関わっている．$\not{D}$ を対角化することは，とりもなおさずゲージ対称性を強制することであり，このときには

$$[\not{D},\gamma_5] = -2\gamma_5\not{D} \tag{11.1.4}$$

からわかるように，$\gamma_5$ は同時対角化できない．$\not{D}$ の固有値が 0 のところに着目すると，$\gamma_5$ も同時対角化可能であり，事実このセクターから指数という概念が生じている．このことは一見，$\gamma_5$ と $\not{D}$ が同時に対角化できないという性質と無関係のところで指数が生まれているようにみえるが，上で説明したように，無限の自由度が(正方行列に対して)指数という概念を定義するのに基本的な役割を果たしており，したがって，2つの演算子が交換しないという性質は，量子異常の考察に基本的な役割を果たしている．事実この交換関係の右辺を，1個の Fermi 粒子の Hilbert 空間で平均したものを計算すると(4.3.14)を参照して

$$
\begin{aligned}
-\langle 0|\bar{\psi}(x)2\gamma_5 \not{D}\psi(x)|0\rangle &= -\sum_n 2\frac{\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\lambda_n\varphi_n(x)}{i\lambda_n - m} \\
&= \sum_n 2im\frac{\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)}{i\lambda_n - m} + \sum_n 2i\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x) \\
&= 2im\langle 0|\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)|0\rangle + \mathrm{tr}\,\frac{2ig^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{11.1.5}
$$

が得られ，質量によるカイラル対称性の破れと量子異常の両方が得られることになる．ただし，最後の計算においては第 5 章で説明したように非常に弱い正則化であるが，$\lambda_n$ に対する足し上げ方を指定するする必要がある．

同様に，Weyl 変換の場合も形式的に Weyl 変換の生成演算子を $w$ とすると

$$
i[w, e_a{}^\mu(x)] = e_a{}^\mu(x) \tag{11.1.6}
$$

が成立し，Dirac 演算子 $\not{D} = \gamma^a e_a{}^\mu(x)(\partial_\mu - (i/2)\sigma^{ab}A_\mu^{ab} - igA_\mu)$ で少し曲がった空間を考えると $[w, A_\mu] = 0$ なので

$$
i[w, \not{D}] = \not{D} \tag{11.1.7}
$$

が成立する．この式の右辺の平均値を平坦な空間で考えると(11.1.5)と同様にして

$$
\begin{aligned}
i\langle 0|\bar{\psi}(x)\not{D}\psi(x)|0\rangle &= i\sum_n \frac{\varphi_n^\dagger(x)\lambda_n\varphi_n(x)}{i\lambda_n - m} \\
&= \sum_n m\frac{\varphi_n^\dagger(x)\varphi_n(x)}{i\lambda_n - m} + \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\varphi_n(x) \\
&= m\langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(x)|0\rangle + \mathrm{tr}\,\frac{g^2}{24\pi^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{11.1.8}
$$

を与える．ここでも，第 7 章の(7.4.8)で議論したように，最後の項は適切な固有値に関する切断を用いて連結した成分だけを残して計算される．このようにして，質量項による Weyl 対称性の破れと量子異常の両方が正しく計算されることになる．

これらの例からわかるように，対称性の量子的破れ(のある側面)は形式的には 2 つの基本的な演算子が同時に対角化できないという一種の“不確定性関係”と類似の現象として理解することが可能である．

さて，ここで本書で議論しなかった量子異常の他のテーマについて簡単にコ

メントしたい．まず，Witten に始まる非摂動的な(大局的)$SU(2)$ 量子異常と呼ばれる問題を考える．$L_\mu = L_\mu^a(x)T^a$ を群 $SU(2)$ に属するゲージ場として第 6 章の(6.4.1)での経路積分を(6.4.10)および(6.4.12)を考慮して

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}\psi_L \mathcal{D}\bar{\psi}_L \exp\left\{\int [\bar{\psi}_L(x) i\gamma^\mu(\partial_\mu - iL_\mu(x))\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_L(x)]d^4x\right\}\\ &= \lim_{N\to\infty} \det\,\langle x|\varphi_n\rangle \det\,\langle\phi_n|x\rangle \prod_n^N d\bar{b}_n da_n \exp\,[\sum_{\lambda_n>0}^N \lambda_n \bar{b}_n a_n]\\ &= \lim_{N\to\infty} \det\,\langle x|\varphi_n\rangle \prod_{\lambda_n>0}^N \lambda_n \det\,\langle\phi_n|x\rangle \qquad (11.1.9)\end{aligned}$$

と書く．ここですべて $\lambda_n \neq 0$ とする．この分解は，

$$\det \not{D}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) = \lim_{N\to\infty} \det\,\langle x|\varphi_n\rangle \prod_{\lambda_n>0}^N \lambda_n \det\,\langle\phi_n|x\rangle \qquad (11.1.10)$$

を意味し，一般の(正方行列)$M$ の 2 つのユニタリー行列 $U$, $V$ と正の対角行列 $\Lambda$ を用いた分解 $M = U\Lambda V^\dagger$ に対応する．$SU(2)$ に対しては，ゲージ自由度に量子異常が現われないことからも予想されるように(11.1.10)の右辺で位相因子 $\det\,\langle x|\varphi_n\rangle \det\,\langle\phi_n|x\rangle$ をある固定した $L_\mu(x)$ に対しては無視してよく[*1]

$$\det \not{D}\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right) = \lim_{N\to\infty} \prod_{\lambda_n>0}^N \lambda_n \qquad (11.1.11)$$

と書ける．Witten の分析の核心は，$SU(2)$ のゲージ場 $L_\mu$ をすべての関数空間にわたって(なめらかに)変化させると，正に選んだ固有値 $\lambda_n$ の中で奇数個の固有値が 0 を通過して符号を変えるというものである．したがってすべてのゲージ場に関して足し上げると，経路積分(11.1.9)が 0 になり意味のない理論を与える．ただし，現実の Weinberg-Salam 理論では，レプトンと色の自由度を考慮したクォークの和は群 $SU(2)$ の二重項を偶数個(=4)含み矛盾しない．この問題の詳細な分析には，かなり高度の数学的な準備が必要になり，巻末に参考

---

*1　群 $SU(2)$ は Pauli 行列が持つ性質 $-(\tau^a)^* = \tau_2\tau^a\tau_2$ から擬実(pseudo-real)と呼ばれ，この場合には $\gamma_5$ を対角的にする表示で Dirac の演算子を 2 行 2 列の行列に分解して考察すると，$\det\,\langle x|\varphi_n\rangle = 1$, $\det\,\langle\phi_n|x\rangle = 1$ とできることが結論される．$\lambda_n$ はゲージ不変なのでこのことが，$SU(2)$ がゲージ自由度にカイラル量子異常を含まない理由と考えられる．この観点からすれば，正の対角行列 $\Lambda$ を用いた分解 $M = U\Lambda V^\dagger$ は 0 固有値が現われると一般に特異的になるが，$SU(2)$ 量子異常はゲージ場を変化させると必然的に $\Lambda$ に 0 固有値が現われることを示している．

文献およびこの問題に関する単行本を挙げておく．

次に，本書では弦の理論に関係した量子異常の詳細，特に Green と Schwarz による量子的に矛盾のない超弦理論の存在と関係した量子異常の相殺の議論はしなかった．この問題を議論する基礎的な道具立ては本書で議論されてはいるが，具体的な考察にはさらに重力的な量子異常の詳細が必要になる．また弦理論そのものにおける量子異常の計算も興味のある課題ではあるが，これらに関しては巻末の参考文献をご覧いただきたい．

また最近素粒子論で多くの人たちが研究に従事している超対称性理論およびそこに現れる量子異常の議論もしなかった．超対称性を持つ理論も成分に分解して考えると，本書で議論した手法ですべて計算可能ではある．しかし，通常の理論では一見無関係に見える量子異常も超対称性を考えると相互に関係していたり，また超空間あるいは超場を用いた定式化では本書で議論した手法を一般化する必要がある．この場合も，経路積分の手法およびヤコビアンの計算は適用できることが示されているが，この問題に関しても，巻末の参考文献をご覧いただきたい．

# A 量子電磁力学の概要

この付録では量子電磁力学の概要を述べる．

## A.1 量子電磁力学

量子電磁力学の基本的な作用は Maxwell の作用と Dirac 作用の結合として次の式で定義される．

$$\int d^4x\mathcal{L} = \int d^4\{\bar{\psi}(t,\vec{x})[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi(t,\vec{x}) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2\} \tag{A.1.1}$$

量子電磁力学の作用の大きな特徴として電磁場 $A_\mu$ が $\psi$ と共変微分と呼ばれる

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(x) \tag{A.1.2}$$

のみを通じて結合していることがある．この特殊な結合の結果，作用積分は $\omega(x)$ を任意の関数として，Maxwell 理論が持つゲージ対称性を一般化した変換

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\omega(x), \\ \psi(x) &\to \psi(x)' = U(x)\psi(x) \equiv \exp[i\omega(x)]\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}(x)' = \bar{\psi}(x)U(x)^\dagger \equiv \bar{\psi}(x)\exp[-i\omega(x)] \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

の下で不変(形を変えない)であるという著しい性質を持つ．この変換で共変微分は

$$D_\mu \to D'_\mu = U(x)D_\mu U(x)^\dagger = \partial_\mu - ie(A_\mu(x) + \frac{1}{e}\omega(x)) \tag{A.1.4}$$

と変換される．

ゲージ理論の原理と呼ばれるものは，この論理を逆転して，一般に物質場 $\psi$ を $\psi(x)' = U(x)\psi(x)$ のように位相変換したときに作用が不変であることを要請する．このときにゲージ場と共変微分が同時に導入され，またゲージ場(現在の場合は電磁場)のゲージ変換の仕方が決められる．したがって，ゲージ場自身の作用積分の形もこの変換の下で不変なように決められるわけである．実は，こうして構成された理論がくり込み可能である(すなわち，高次の量子効果に伴う発散が矛盾なく扱える)という性質を要求すると，作用が一意的に決められることが知られている．このことが，ゲージ理論あるいはゲージ原理を非常に有用にしている理由である．

現在の例ではゲージ変換は

$$U_1(x)U_2(x) = \exp\left[i\omega_1(x)\right]\exp\left[i\omega_2(x)\right] = \exp\left[i(\omega_1(x)+\omega_2(x))\right] \tag{A.1.5}$$

のように足し算の規則で合成される．すなわちゲージ群は Abel 群 $U(1)$ を構成し，この理由で電磁場 $A_\mu$ は Abel 的ゲージ場とも呼ばれる．一般に任意のコンパクトな群に対してゲージ場が矛盾なく導入され，非 Abel 的な群に付随したゲージ場は Yang–Mills 場と呼ばれている．

共変微分の名前の由来は $D_\mu\psi(x)$ が

$$D_\mu\psi(x) \to U(x)D_\mu U(x)^\dagger U(x)\psi(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \tag{A.1.6}$$

のようにもとの $\psi(x)$ と同じ形で変換されるからである．共変微分を用いて一般に"曲率"

$$[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_n - D_\nu D_\mu = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu} \tag{A.1.7}$$

として電磁場の場の強さを表すテンソルが得られる．この定義から

$$[UD_\mu U^\dagger, UD_\nu U^\dagger] = U[D_\mu, D_\nu]U^\dagger = -ieF_{\mu\nu} \tag{A.1.8}$$

のように，電磁場の強さがゲージ不変であることがわかる．また Jacobi の恒等式

$$[D_\mu,[D_\nu,D_\alpha]] + [D_\nu,[D_\alpha,D_\mu]] + [D_\alpha,[D_\mu,D_\nu]] = 0 \tag{A.1.9}$$

から Maxwell 方程式の 4 個の方程式のうちの 2 個に対応する関係式

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \tag{A.1.10}$$

が得られる．

量子電磁力学の基本的な作用のもう一つの特徴は Pauli 項と呼ばれるそれ自

身でゲージ不変な相互作用項 $gF_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi(x)$ が現われないことである．これは理論のくり込み可能性と関係しており，Pauli 項を付け加えた理論はくり込み可能ではないからである．量子電磁力学の作用のように共変微分を通じて最小限の相互作用をしている理論は最小結合(minimal coupling)した理論と呼ばれる．

さて，量子電磁力学の経路積分による量子化は第 2 章と第 3 章の議論から

$$\begin{aligned}
&\langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J \\
&\quad=\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \\
&\qquad\times\exp\{i\int d^4x\{\bar{\psi}(t,\vec{x})[i\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)-m]\psi(t,\vec{x})-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2 \\
&\qquad+B(x)\partial^\mu A_\mu(x)+i\partial^\mu\bar{c}\partial_\mu c+\frac{\xi}{2}B^2-A_\mu(x)J^\mu(x)+\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)\}\}
\end{aligned} \tag{A.1.11}$$

で与えられる．電磁場の経路積分としては $\xi$ ゲージ条件(3.2.27)を採用し(現在の Abel 的なゲージ理論では重要でないが，Faddeev–Popov のゴーストも陽に書いて)，また Dirac 場に対しては Grassmann 数に関する微分として経路積分が定義される．Schwinger にしたがって，電磁場に対しては通常の $c$ 数の源(source)$J^\mu(x)$ を，また Dirac 場に対しては Grassmann 数の源 $\bar{\eta}(x)$ と $\eta(x)$ を導入した．この経路積分に現われる作用積分を $S_J$ とすると，量子論での運動方程式は，例えば，$A_\mu$ および $\bar{\psi}$ に関して $S_J$ を変分して

$$\begin{aligned}
&\partial_\nu\hat{F}^{\nu\mu}(x)-\partial^\mu\hat{B}(x)+e\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}(x)-J^\mu(x)=0, \\
&[i\gamma^\mu(\partial_\mu-ie\hat{A}_\mu(x))-m]\hat{\psi}(x)+\eta(x)=0
\end{aligned} \tag{A.1.12}$$

で与えられる．

これらの方程式の行列要素は 0 になる必要がある．具体的には，第 2 章の Schwinger の作用原理を用いて演算子を源に関する微分に直し上記の経路積分表示を使うと，$c$ 数で書かれた運動方程式が被積分関数として経路積分の中に現われ

$$\begin{aligned}
&\langle 0,+\infty|\partial_\nu \hat{F}^{\nu\mu}(x) - \partial^\mu \hat{B}(x) + e\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu \hat{\psi}(x) - J^\mu(x)|0,-\infty\rangle_J \\
&= \int d\mu\{\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) - \partial^\mu B(x) + e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi(x) - J^\mu(x)\} \exp[iS_J] \\
&= \int d\mu \frac{-i\delta}{\delta A_\mu(x)} \exp[iS_J] = 0
\end{aligned} \tag{A.1.13}$$

および

$$\begin{aligned}
&\langle 0,+\infty|[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ie\hat{A}_\mu(x)) - m]\hat{\psi}(x) + \eta(x)|0,-\infty\rangle_J \\
&= \int d\mu\{[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x)) - m]\psi(x) + \eta(x)\} \exp[iS_J] \\
&= \int d\mu \frac{-i\delta}{\delta\bar{\psi}(x)} \exp[iS_J] = 0
\end{aligned} \tag{A.1.14}$$

のように，経路積分の測度

$$d\mu \equiv \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}B\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \tag{A.1.15}$$

が Bose 粒子の場合も Fermi 粒子の場合も関数空間で「並進不変」であること(すなわち，微分の定積分は 0 になること)を用いると，確かに満たされている．すなわち相互作用でお互いに結合したゲージ場と Dirac 場の場合にも，経路積分公式は正しい答えを与えることがわかる．

## A.2 相互作用表示と摂動公式

上記の経路積分に現れる(有効)ラグランジアン密度を

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_J &= \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi(x) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \\
&\quad + B(x)\partial^\mu A_\mu(x) + i\partial^\mu \bar{c}\partial_\mu c + \frac{\xi}{2}B^2 - A_\mu(x)J^\mu(x) \\
&\quad + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \\
&= \mathcal{L}_J^0 + \mathcal{L}_{\rm int}
\end{aligned} \tag{A.2.1}$$

のように，場の変数の 2 次式で与えられる自由場の部分 $\mathcal{L}_J^{(0)}$ と相互作用部分

$$\mathcal{L}_{\rm int} \equiv eA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{A.2.2}$$

に分ける．このとき摂動計算は次の経路積分の計算に帰着する．

$$
\begin{aligned}
&\langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J \\
&= \int d\mu \exp\,[i\int d^4x\mathcal{L}_J^{(0)}(x)] \sum_{n=0}^{\infty}(i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(x))^n \\
&= \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}\left\{\frac{i\delta}{\delta J^\mu(x)},\frac{i\delta}{\delta\eta(x)},\frac{-i\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right\}\right]\int d\mu \exp\,[i\int d^4x\mathcal{L}_J^{(0)}(x)] \\
&= \exp\left[ie\int d^4x\left\{\frac{i\delta}{\delta J^\mu(x)}\frac{i\delta}{\delta\eta(x)}\gamma^\mu\frac{-i\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right\}\right]\int d\mu \exp\,[i\int d^4x\mathcal{L}_J^{(0)}(x)]
\end{aligned} \tag{A.2.3}
$$

最後の 2 式では相互作用が源に関する関数微分で与えられているが，この微分を含む指数関数を経路積分の中に持ち込むと，微分が $\mathcal{L}_J^{(0)}$ に含まれている源に作用しそれぞれ対応する場の変数に変わり，最初の出発点の公式に帰着する．この最後の公式の重要な点は，経路積分は自由場に対して行われていることである．これは演算子形式での**相互作用表示**に対応している．相互作用表示では場の変数はすべて自由場の運動方程式を満たすが，$\mathcal{L}_J^{(0)}$ で定義された経路積分に Schwinger の作用原理を適用すると，例えば，Dirac 場 $\psi$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle 0,+\infty|[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\hat{\psi}(x)+\eta(x)|0,-\infty\rangle_J^{(0)} \\
&= \int d\mu\{[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi(x)+\eta(x)\}\exp\,[iS_J^{(0)}] \\
&= \int d\mu\frac{-i\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\exp\,[iS_J^{(0)}] = 0
\end{aligned} \tag{A.2.4}
$$

となり，確かに自由な運動方程式を満たしている．このようにして，上記の摂動展開公式(A.2.3)は演算子形式での Dyson の $S$-行列の公式に対応している．経路積分では，演算子形式での Wick の定理と呼ばれる操作が，源に関する微分で与えられるのは興味深い．

さて，自由場の経路積分は具体的に実行できる．そのために次の Feynman の伝搬関数を定義する．

$$
\begin{aligned}
S_F^{(0)}(x-y) &= \frac{1}{i\gamma^\mu\partial_\mu - m + i\epsilon}\delta^4(x-y), \\
D_F^{(0)}(x-y)_{\mu\nu} &= \frac{g_{\mu\nu}+(\xi-1)\partial_\mu\partial_\nu/\partial_\mu\partial^\mu}{\partial_\mu\partial^\mu - i\epsilon}\delta^4(x-y)
\end{aligned} \tag{A.2.5}
$$

ただし微分演算子 $\partial_\mu$ は座標 $x^\mu$ に作用するものとする．これらの関数を用いて，

経路積分で次の変数変換を行う．ただし，$\epsilon$ は無限小の正の数である．

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &= A'_\mu(x) + \int D_F^{(0)}(x-y)_{\mu\nu} J^\nu(y) d^4y, \\
\psi(x) &= \psi'(x) - \int S_F^{(0)}(x-y)\eta(y) d^4y, \\
\bar\psi(x) &= \bar\psi'(x) - \int \bar\eta(y) S_F^{(0)}(x-y) d^4y
\end{aligned} \tag{A.2.6}$$

この変数変換に対して経路積分の測度は並進不変であること，例えば $\mathcal{D}\psi = \mathcal{D}\psi'$，に注意して，その後で改めて ′ つきの変数を ′ なしの変数で書くと，自由場の経路積分は

$$\begin{aligned}
&\langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J^{(0)} = \int d\mu \exp\{i\int d^4x \mathcal{L}_J^{(0)}\} \\
&= \int d\mu \exp[i\int d^4x \mathcal{L}_{J=0}^{(0)}] \\
&\quad \times \exp\{-i\int[\frac{1}{2}J^\mu(x) D_F^{(0)}(x-y)_{\mu\nu} J^\nu(y) + \bar\eta(x) S_F^{(0)}(x-y)\eta(y)] d^4x d^4y\}
\end{aligned} \tag{A.2.7}$$

となり，相互作用表示での経路積分の規格化，$\langle 0,+\infty|0,\infty\rangle_{J=0}^{(0)} = 1$，を用いて最終的に自由場の経路積分の結果

$$\begin{aligned}
&\langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J^{(0)} \\
&\quad = \exp\{-i\int[\frac{1}{2}J^\mu(x) D_F^{(0)}(x-y)_{\mu\nu} J^\nu(y) + \bar\eta(x) S_F^{(0)}(x-y)\eta(y)] d^4x d^4y\}
\end{aligned} \tag{A.2.8}$$

が得られる．

この自由場の経路積分の結果に Schwinger の作用原理を適用すると

$$\begin{aligned}
&\frac{-i\delta}{\delta\bar\eta(x)} \frac{i\delta}{\delta\eta(y)} \langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J^{(0)}|_{J=0} \\
&= \langle 0,+\infty|T^*\psi(x)\bar\psi(y)|0,\infty\rangle_{J=0}^{(0)} \\
&= iS_F^{(0)}(x-y) = i\frac{1}{i\gamma^\mu\partial_\mu - m + i\epsilon}\delta^4(x-y) \\
&= i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not p - m + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0}[(\not{p}+m)_{\alpha\beta}e^{-ip(x-y)}\theta(x^0-y^0)$$
$$-(\not{p}-m)_{\alpha\beta}e^{ip(x-y)}\theta(y^0-x^0)] \qquad \text{(A.2.9)}$$

が得られる．ただし $\delta$ 関数の表示 $\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\exp[-ip(x-y)]$ を用いた．この最後の式は，$i\epsilon$ に注意しながら $p_0$ に関する積分を指数関数が減衰する方向へ積分路を変形して得られ，演算子形式での結果と一致することが知られている．すなわち Feynman の $i\epsilon$ 処方は，Dirac 方程式の負のエネルギー解は時間軸の負の方向にのみ伝搬するように指定し，正のエネルギーを持ち正の時間軸方向へ伝搬する反粒子(現在の場合は陽電子)として記述する．同様に

$$\frac{i\delta}{\delta J^\mu(x)}\frac{i\delta}{\delta J^\nu(y)}\langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J^{(0)}|_{J=0}$$
$$= \langle 0,+\infty|T^* A_\mu(x)A_\nu(y)|0,-\infty\rangle_{J=0}^{(0)}$$
$$= iD_F^{(0)}(x-y)_{\mu\nu} = i\frac{g_{\mu\nu}+(\xi-1)\partial_\mu\partial_\nu/\partial_\mu\partial^\mu}{\partial_\mu\partial^\mu - i\epsilon}\delta^4(x-y)$$
$$= -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{g_{\mu\nu}+(\xi-1)p_\mu p_\nu/p_\mu p^\mu}{p_\mu p^\mu + i\epsilon}e^{-ip(x-y)}$$
$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0}(-g_{\mu\nu})[e^{-ip(x-y)}\theta(x^0-y^0)+e^{ip(x-y)}\theta(y^0-x^0)]$$
$$\text{(A.2.10)}$$

が得られる．ただし，一番最後の式は簡単のため $\xi=1$ という Feynman ゲージの結果を与えた．この結果も $\xi$ ゲージでの演算子形式での結果と一致することが(ここでは示さないが)知られている．$i\epsilon$ 処方は，Maxwell 方程式の負のエネルギー解は負の時間軸方向にのみ伝搬するようにし，結果として正のエネルギーを持ち正の時間軸方向へ伝搬する反粒子(ただし実の場である光の場合は反粒子は粒子と同じである)として記述する．

このようにして，量子電磁力学の摂動公式は

$$\langle 0,+\infty|0,-\infty\rangle_J = \exp\left[ie\int d^4x\left\{\frac{i\delta}{\delta J^\mu(x)}\frac{i\delta}{\delta\eta(x)}\gamma^\mu\frac{-i\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\right\}\right]$$
$$\times\exp\{-i\int[\frac{1}{2}J^\mu(x)D_F^{(0)}(x-y)_{\mu\nu}J^\nu(y)$$
$$+\bar{\eta}(x)S_F^{(0)}(x-y)\eta(y)]d^4x d^4y\} \qquad \text{(A.2.11)}$$

で与えられる．電荷 $e$ に関して適当な次数まで展開し，その後で両辺を源に関して適当な回数微分して最終的に源をすべて 0 にすると，$e\gamma^{\mu}$ で表される頂点を Feynman の伝播関数 $D_F^{(0)}$ と $S_F^{(0)}$ で結んだ形の Green 関数が得られるわけである．これを直感的にわかりやすく図示するのが Feynman 図である．

この簡単な公式(A.2.11)が量子電磁力学のすべての情報を含んでいる．

# B

# 曲がった空間の場の理論

この付録では，曲がった空間の場の理論の基礎的な性質を簡単にまとめる．

## B.1 座標変換とエネルギー運動量テンソル

曲がった空間で，QCD 型のゲージ場があるときの Einstein の一般相対論のラグランジアンは，$G$ を Newton の定数および $\kappa = 8\pi G$ として

$$\mathcal{L} = \frac{R}{2\kappa} + \bar{\psi} i e_k^\mu \gamma^k (\partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{mn} \sigma_{mn} - i A_\mu^a T^a)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a \tag{B.1.1}$$

で定義される．ここで，曲がった空間を記述するパラメターであるギリシャ文字の Minkowski の足と，曲がった空間の各点に貼り付けられた計量 $G_{mn}$ で指定される平坦な空間を記述するローマ字の Lorentz の足を結びつける $e_k^\mu(x)$ は，4 脚場(vierbein)と呼ばれ計量テンソルと

$$\begin{aligned} &e_m^\mu e_{\mu n} = G_{mn}, \quad G_{mn} = (1, -1, -1, -1), \\ &g^{\mu\nu} = e_m^\mu e^{\nu m}, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho, \\ &ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu d^\nu \end{aligned} \tag{B.1.2}$$

で結び付けられている．Minkowski の添え字 $\mu$ の上げ下げは計量 $g_{\mu\nu}$ で，Lorentz の添え字 $m$ の上げ下げは $G_{mn}$ で行う．Einstein 理論の基礎的な対称性である一般座標変換は 2 価表現を含まないので，Dirac 場の 2 価表現を時空間の各点に付与された平坦な空間の Lorentz 回転群の 2 価表現として導入するわけである．

曲がった空間における共変微分は，一般に

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}A_\mu^{mn}S_{mn} - iU_\alpha^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - iA_\mu^a T^a \qquad \text{(B.1.3)}$$

で与えられ，通常のゲージ群の生成演算子 $T^a$ 以外に，Lorentz 群の生成演算子 $S_{mn}$ と一般座標変換 $GL(4,R)$ の生成演算子 $U_\alpha^\beta$ を含み，これらは

$$\begin{aligned}
&[S_{mn}, S_{kl}] = -i(G_{mk}S_{nl} + G_{nl}S_{mk} - G_{ml}S_{nk} - G_{nk}S_{ml}),\\
&[U_\alpha^\beta, U_\gamma^\delta] = -i(\delta_\alpha^\delta U_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\beta U_\alpha^\delta)
\end{aligned} \qquad \text{(B.1.4)}$$

で定義される．具体的には，スピン 1/2 と 1 に対しては

$$\begin{aligned}
&S_{mn}^{(1/2)} = \sigma_{mn} = \frac{i}{4}[\gamma_m, \gamma_n], \quad \gamma_m \text{ は Dirac 行列},\\
&(S_{mn}^{(1)})^{kl} = i(\delta_m^k \delta_n^l - \delta_m^l \delta_n^k)
\end{aligned} \qquad \text{(B.1.5)}$$

で与えられ，他方，一般座標変換の生成演算子 $U_\alpha^\beta$ は共変ベクトル $A_\nu$ および反変ベクトル $A^\nu$ に対してそれぞれ

$$(U_\alpha^\beta)_\mu{}^\nu A_\nu = (-i\delta_\alpha^\nu \delta_\mu^\beta)A_\nu, \quad (U_\alpha^\beta)^\mu{}_\nu A^\nu = (i\delta_\alpha^\mu \delta_\nu^\beta)A^\nu \qquad \text{(B.1.6)}$$

で与えられる．したがって，共変微分は次のように与えられる．

$$D_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu A^\rho, \quad D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho \qquad \text{(B.1.7)}$$

共変微分に現われるゲージ場 $A_\mu^{mn}$ はスピン接続，$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$ は**アフィン接続**と呼ばれ，$e_k^\mu$ と $g_{\mu\nu}$ を使って

$$\begin{aligned}
&A_\mu^{mn} = \frac{1}{2}e^{m\lambda}e^{n\rho}(C_{\lambda\rho\mu} - C_{\rho\lambda\mu} - C_{\mu\lambda\rho}),\\
&C_{\lambda\rho\mu} \equiv e_\lambda^k(\partial_\rho e_{k\mu} - \partial_\mu e_{k\rho}),\\
&\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \left\{\begin{array}{c}\lambda\\ \mu\nu\end{array}\right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})
\end{aligned} \qquad \text{(B.1.8)}$$

のように与えられる．ねじれ(torsion)の自由度を無視している現在の $A_\mu^{mn}$ と $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$ はそれぞれ Ricci 回転係数，Christoffel 記号とも呼ばれる．

一般座標変換は，幾何学的な量である長さが座標の取り方によらないという Riemann の基本的な関係式

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu \qquad \text{(B.1.9)}$$

から Minkowski の足に関する変換則が

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad e'^\mu_k(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} e^\nu_k(x),$$
$$\psi'(x') = \psi(x), \quad A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha(x) \tag{B.1.10}$$

などのように与えられる．あるいは，無限小の変換

$$x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x), \quad \Lambda_\beta{}^\alpha(x) = \partial_\beta \xi^\alpha(x) \tag{B.1.11}$$

に対しては，一般座標変換の生成演算子を用いて

$$e'^\mu_k(x') = (\exp[iU^\beta_\alpha \Lambda_\beta{}^\alpha] e_k)^\mu(x) = e^\mu_k(x) - \Lambda_\nu{}^\mu(x) e^\nu_k(x) \tag{B.1.12}$$

のように書くこともできる．計量の変換則はこの 4 脚場の変換則から

$$g'^{\mu\nu}(x') = e'^\mu_k(x') e'^{\nu k}(x') = g^{\mu\nu}(x) - \Lambda_\lambda{}^\mu g^{\lambda\nu}(x) - \Lambda_\lambda{}^\nu g^{\mu\lambda}(x) \tag{B.1.13}$$

のように導かれ，この式とアフィン接続の定義式からアフィン接続の変換則は

$$\Gamma'^\alpha_{\beta\mu}(x') = \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(x) + \Lambda_\beta{}^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}(x) - \Lambda_\lambda{}^\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\mu}(x) + \Lambda_\mu{}^\lambda \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}(x) + \partial_\mu \Lambda_\beta{}^\alpha(x) \tag{B.1.14}$$

と定められる．

無限小の局所 Lorentz 変換は，パラメター $\omega^{mn}(x)$ を用いてゲージ理論の変換と同じく Lorentz 群の生成演算子を用いて次式で与えられる．

$$\psi'(x) = \exp[\frac{i}{2} S^{(1/2)}_{mn} \omega^{mn}]\psi(x) = \psi(x) + \frac{i}{2}\sigma_{mn}\omega^{mn}(x)\psi(x),$$
$$e'^\mu_k(x) = \exp[\frac{i}{2} S^{(1)}_{mn}\omega^{mn}] e^\mu_k(x) = e^\mu_k(x) - \omega_k{}^n(x) e^\mu_n(x),$$
$$A'^{mn}_\mu(x) = A^{mn}_\mu(x) + A^{ml}_\mu \omega_l{}^n(x) + A^{nl}_\mu \omega^m_l(x) + \partial_\mu \omega^{mn}(x) \tag{B.1.15}$$

この最後のスピン接続の変換則は，共変微分の変換

$$D'_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A'^{mn}_\mu S_{mn} = \exp\left[\frac{i}{2} S_{mn}\omega^{mn}\right] D_\mu \exp\left[-\frac{i}{2} S_{mn}\omega^{mn}\right] \tag{B.1.16}$$

からも，あるいは $e^\mu_k$ を用いた $A^{mn}_\mu$ の定義と $e^\mu_k$ の変換則からも求められる．

Einstein 理論は，ゲージ場として $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と $A^{mn}_\mu$ の 2 つの場を含んでいるが，これらは共に 4 脚場 $e^\mu_k$ で表される．ゲージ自由度としては，局所化した Poincaré

変換，すなわち 4 個の併進 $\xi^\mu(x)$ と 6 個の Lorentz 回転 $\omega^{mn}(x)$ の計 10 個の自由度を含んでいる．現在の定式化では，**計量条件**と呼ばれる

$$(D_\mu e)^\nu_k = \partial_\mu e^\nu_k + \Gamma^\nu_{\beta\mu} e^\beta_k + A^l_{\mu k} e^\nu_l = 0 \qquad \text{(B.1.17)}$$

は恒等的に満たされている．すなわち，点 $x$ から $x + dx$ へ平行移動したベクトルの内積は計量 $g_{\mu\nu}(x + dx)$ で定義される．

この計量条件の応用として，空間の任意の一点，例えば原点で，$e^\mu_k$ を

$$e^\nu_k(0) = \delta^\nu_k, \quad \partial_\mu e^\nu_k(0) = 0 \qquad \text{(B.1.18)}$$

のように選ぶことができることが示される．この式は本書でも量子異常の計算で用いる．この式の証明は，まず原点の近くで適当な定数 $a^\mu_\nu$ を選んで，$x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$ という座標変換を $e^\mu_k$ にほどこすと

$$e'^\mu_k(0) = a^\mu_\nu e^\nu_k(0) = \delta^\mu_k \qquad \text{(B.1.19)}$$

とすることができる．つぎに

$$\xi^\alpha(x) = -\frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\beta\mu} x^\beta x^\mu \qquad \text{(B.1.20)}$$

という特殊な原点の近くでの無限小の座標変換をおこなうと，$e'^\mu_k(0)$ を変化させずに $\Gamma'^\alpha_{\beta\mu}(0) = 0$ とできる．最後に $\omega^{mn}(x) = -A^{mn}_\mu(0)x^\mu$ という Lorentz 変換をおこなうと，$e'^\mu_k(0)$ を変えずに $A'^{mn}_\mu(0) = 0$ とできる．$\Gamma'^\alpha_{\beta\mu}(0) = 0$ と $A'^{mn}_\mu(0) = 0$ を計量条件の式 (B.1.17) で用いると，求める結果が得られる．

計量条件は，$e^\mu_k$ とか $g_{\mu\nu}$ は共変微分と自由に交換するとしてよいことを示している．例えば，任意の共変ベクトル $A_\rho = e^n_\rho A_n$ に共変微分の交換子を作用させると

$$\begin{aligned} -R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} A_\alpha &\equiv ([D_\mu, D_\nu]A)_\rho \\ &= e^n_\rho([D_\mu, D_\nu]A)_n = -e^\alpha_m e_{\rho n} R^{mn}{}_{\mu\nu} A_\alpha \end{aligned} \qquad \text{(B.1.21)}$$

が求められる．この式はアフィン接続 $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ を用いて計算した Riemann–Christoffel の曲率テンソル

$$R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\rho\mu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\mu} \qquad \text{(B.1.22)}$$

が，スピン接続 $A^{mn}_\mu$ を用いて計算した曲率 $R^{mn}_{\mu\nu}$ と一致することを示している．

ゲージ理論に現われる物質場の持つ重要な局所的な対称性に次式で定義される Weyl 対称性がある．

$$
\begin{aligned}
&e_k^\mu(x) \to \exp[\alpha(x)]e_k^\mu(x), \quad e_{k\mu}(x) \to \exp[-\alpha(x)]e_{k\mu}(x),\\
&g^{\mu\nu}(x) \to \exp[2\alpha(x)]g^{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu}(x) \to \exp[-2\alpha(x)]g_{\mu\nu}(x),\\
&\psi(x) \to \exp[\frac{3}{2}\alpha(x)]\psi(x), \quad A_\mu^a(x) \to A_\mu^a(x),\\
&\frac{i}{2}A_\mu^{mn}\sigma_{mn} \to \frac{i}{2}A_\mu^{mn}\sigma_{mn} - \frac{1}{2}\partial_\mu\alpha - \gamma_\mu\gamma^\lambda\partial_\lambda\alpha
\end{aligned}
\tag{B.1.23}
$$

ここで，スピン接続 $A_\mu^{mn}$ の変換則は 4 脚場 $e_k^\mu$ を用いた表式で $e_k^\mu$ の変換則を用いて決められる．Weyl 変換は長さを

$$
ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \to \exp[-2\alpha(x)]ds^2 = \exp[-2\alpha(x)]g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{B.1.24}
$$

のように変えるが局所的な角度を変えず，その理由で共形(conformal)変換とも呼ばれる．$g = \det g_{\mu\nu}$ を定義して，この付録の最初に与えたラグランジアン (B.1.1) を積分した物質場の部分の作用 $\int \sqrt{-g}\mathcal{L}d^4x$ は，Fermi 粒子の質量を $m = 0$ とすれば，Weyl 変換で不変であることが確かめられる．質量のないスカラー場の場合も，$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{6}R\phi^2$ のように選ぶと Weyl 不変にできる．ただし，Einstein の作用そのものは Weyl 変換で不変ではない．

Einstein の作用(Einstein-Hilbert 作用とも呼ばれる)に現われるスカラー曲率 $R$ および Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ と呼ばれるものは曲率テンソルから

$$
R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad R_{\rho\nu} \equiv R^\alpha{}_{\rho\alpha\nu} \tag{B.1.25}
$$

のように定義される．

Einstein の作用 (B.1.1) において，4 脚場 $e_k^\mu(x)$ に関して変分することにより，Einstein の運動方程式

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}(x) \tag{B.1.26}
$$

が得られる．この方程式で物質場により作られる(素朴な)エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}(x)$ は

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}e_{k\mu}(x)\frac{\delta}{\delta e_k^\nu(x)}S_{\text{matter}}\\
&= \frac{1}{2}[\bar\psi i\gamma_\mu D_\nu\psi - (D_\nu\bar\psi)i\gamma_\mu\psi] - g^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{matter}}\\
&\quad + \frac{1}{4}e_{k\mu}e_{l\nu}e_m^\rho\epsilon^{klmn}D_\rho(\bar\psi\gamma_n\gamma_5\psi)
\end{aligned}
\tag{B.1.27}
$$

により定義される．この式では $\psi$ と $\bar{\psi}$ の扱いを対称化してある．また反対称シンボルは $\epsilon^{1230}=1$ で規格化し，Dirac 行列の性質 $\{\gamma^k, S^{mn}\}_+ = \epsilon^{kmnl}\gamma_l\gamma_5$ を用いた．

エネルギー運動量テンソルの性質を議論するために，Einstein–Hilbert 作用の性質を復習する．まず任意の計量の変分 $\delta g^{\mu\nu}(x)$ に対して次の関係式が成立する

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) d^4x. \qquad \text{(B.1.28)}$$

ここで計量の変化として，座標変換により引き起こされる変化

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu}(x) &\equiv g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) \\ &= \xi^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu}(x) - \partial_\lambda \xi^\mu g^{\lambda\nu}(x) - \partial_\lambda \xi^\nu g^{\lambda\mu}(x) \\ &= -g^{\mu\lambda} D_\lambda \xi^\nu - g^{\nu\lambda} D_\lambda \xi^\mu \end{aligned} \qquad \text{(B.1.29)}$$

を考える．上記の任意の変分 $\delta g^{\mu\nu}(x)$ に対して成立する式で，とくに Einstein–Hilbert の作用は座標変換の下で不変であることおよび計量と共変微分は交換することに注意すると

$$\int \sqrt{-g}\,\xi^\nu D^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) d^4x = 0 \qquad \text{(B.1.30)}$$

が得られ，$\xi^\nu(x)$ は任意なので

$$D^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0 \qquad \text{(B.1.31)}$$

が結論される．この式を Einstein の運動方程式と組み合わせると

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \qquad \text{(B.1.32)}$$

が古典論のエネルギー運動量テンソルに対して結論される．

## B.2　重力理論における経路積分の測度

経路積分を用いて，重力の量子論あるいは曲がった空間の場の理論を分析するときに，経路積分の測度の注意深い定義が必要になる．とくに一般座標変換は微妙な側面があり，素朴な定義では，見かけ上の量子異常を持ち込んでしま

う可能性がある．したがって，ここでは見かけ上の一般座標変換の破れを生じることのないような測度の定義を議論する．

すこし技術的になるが，BRST 対称性というものを用いるのが便利である．BRST 変換というのは，基本的には一般座標変換のパラメター $\xi^\mu$ を $\xi^\mu(x) = i\lambda c^\mu(x)$ のように，定数の Grassmann 数 $\lambda$ と Faddeev-Popov の場と呼ばれる Grassmann 数の場 $c^\mu(x)$ の積に置き換えて定義される．BRST 超場を用いた定義では，BRST 変換を行う前のもとの変数と変換をした後に付け加わる変化分を一つにまとめて，定数の Grassmann 数 $\theta$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&e^\mu_k(x,\theta) = e^\mu_k(x) + i\theta[c^\rho\partial_\rho e^\mu_k(x) - \partial_\rho c^\mu e^\rho_k(x)]\\
&g_{\mu\nu}(x,\theta) = g_{\mu\nu}(x) + i\theta[c^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu c^\rho g_{\rho\nu}(x) + \partial_\nu c^\rho g_{\mu\rho}(x)]\\
&g(x,\theta) \equiv \det\,[g_{\mu\nu}(x,\theta)] = g(x) + i\theta[c^\rho\partial_\rho g(x) + 2\partial_\rho c^\rho g(x)]\\
&\psi(x,\theta) = \psi(x) + i\theta c^\rho\partial_\rho\psi(x)\\
&c^\mu(x,\theta) = c^\mu(x) + i\theta c^\rho\partial_\rho c^\mu(x)\\
&\bar{c}_\mu(x,\theta) = \bar{c}_\mu(x) + \theta B_\mu(x)
\end{aligned}
\tag{B.2.1}
$$

のように与えられる．ここで，$\psi$ の座標変換の公式 $\delta\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) = \xi^\rho\partial_\rho\psi(x)$ を用い，また反ゴースト場 $\bar{c}_\mu(x)$ とそれに付随した中西-Lautrup 場 $B_\mu(x)$ を導入した．

BRST 変換はこれらの式で $\theta \to \theta + \lambda$ と置き換えて定義される．したがって $\theta$ の掛かっていない最初の成分は $\lambda$ に比例する変換を受け，第二の $\theta$ に比例する部分は不変に留まる．具体的には，ゴースト場 $c^\mu(x)$ の変換則 $\delta_\lambda$ は $c^\mu(x)$ と $\lambda$ は共に Grassmann 数であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\delta_\lambda c^\mu(x) &= i\lambda c^\rho\partial_\rho c^\mu(x),\\
\delta_\lambda(c^\rho\partial_\rho c^\mu(x)) &= i\lambda(c^\alpha\partial_\alpha c^\rho(x))\partial_\rho c^\mu(x) + c^\rho\partial_\rho(i\lambda c^\alpha\partial_\alpha c^\mu(x))\\
&= i\lambda[c^\alpha\partial_\alpha c^\rho\partial_\rho c^\mu(x) - c^\rho\partial_\rho c^\alpha\partial_\alpha c^\mu(x)] = 0
\end{aligned}
\tag{B.2.2}
$$

となり，第一成分は第二成分に比例する変換を受け，その変換則を使うと第二成分は不変になり，BRST 変換が矛盾なく定義されていることがわかる．反ゴー

スト場の扱いは例外的で，$\delta_\lambda \bar{c}_\mu(x) = \lambda B(x)$，$\delta_\lambda B(x) = 0$ で定義され，素朴な測度 $\mathcal{D}\bar{c}_\mu \mathcal{D}B_\mu$ が BRST 不変な測度を定義する．BRST 超場を用いると，例えば，$\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0$ というゲージ条件は

$$\bar{c}_\nu(x,\theta)\partial_\mu g^{\mu\nu}(x,\theta) \tag{B.2.3}$$

においてパラメター $\theta$ に関して 1 次の項を集めると，ゲージ固定項とゴースト項が同時に与えられる．

ちなみに，ゴースト場の変換則(B.2.1)は，反変ベクトルの変換則とは異なるように見えるが，超場全体としての微分を考えると

$$dc^\mu(x,\theta) = dc^\mu(x) + i\theta[c^\rho \partial_\rho dc^\mu(x) - \partial_\rho c^\mu dc^\rho(x)] \tag{B.2.4}$$

を与え，反変ベクトル $dc^\mu(x)$ の一般座標変換で $\xi^\rho(x) \to i\theta c^\rho(x)$ という置き換えをしたものになっている．この性質は，これから BRST 不変な測度を定義するときに基本的になる．

一般座標変換に付随した BRST 不変な測度の議論をしたい．まず一番簡単な Minkowski の足を持たない場(これは world scalar と呼ばれる)，例えば，Fermi 場 $\psi(x)$ とか $\bar{\psi}(x)$ に対しては，

$$\tilde{\psi}(x) \equiv (-g)^{1/4}\psi(x), \quad \tilde{\bar{\psi}}(x) \equiv (-g)^{1/4}\bar{\psi}(x) \tag{B.2.5}$$

といういわゆる重み 1/2 つきの変数を定義すると，Fermi 粒子の質量項の経路積分からわかるように

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi} \exp\left[im\int \sqrt{-g}\bar{\psi}(x)\psi(x)d^4x\right] \\ &= \int \mathcal{D}\tilde{\bar{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi} \exp\left[im\int \tilde{\bar{\psi}}(x)\tilde{\psi}(x)d^4x\right] \end{aligned} \tag{B.2.6}$$

が成立する．この関係式で，左辺では作用は一般座標変換(あるいは BRST)不変であり，右辺では計量がどこにも現われない定数(すなわち不変量)になる．したがって，左辺の測度は一般座標変換(および BRST 変換)に対して不変な測度を定義することがわかる．事実，BRST 変換に関するヤコビアンを計算すると，ヤコビアンは自明に 1 になり，量子異常を出さないことが確かめられる．

この議論をベクトル場 $A^\alpha(x)$ とか 2 階のテンソル場 $A_{\alpha\beta}(x)$ などに対しても，まず $A^a(x) = e^a_\alpha A^\alpha(x)$ とか $A_{ab}(x) = e^\alpha_a e^\beta_b A_{\alpha\beta}(x)$ のように 4 脚場を用いて，Minkowski の足のない変数に変えておいて，上記の重み 1/2 の処方箋を用

いると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\tilde{A}^a &\equiv \mathcal{D}((-g)^{1/4}e^a_\alpha A^\alpha) = -g(\det e^a_\alpha)\mathcal{D}A^\alpha = \mathcal{D}((-g)^{3/8}A^\alpha) \\
\mathcal{D}\tilde{A}_a &\equiv \mathcal{D}((-g)^{1/4}e^\alpha_a A_\alpha) = \mathcal{D}((-g)^{1/8}A_\alpha) \\
\mathcal{D}\tilde{A}^{ab} &\equiv \mathcal{D}((-g)^{1/4}e^a_\alpha e^b_\beta A^{\alpha\beta}) = \mathcal{D}((-g)^k A^{\alpha\beta}), \quad k = \frac{n+4}{4n} \\
\mathcal{D}\tilde{A}_{ab} &\equiv \mathcal{D}((-g)^{1/4}e^\alpha_a e^\beta_b A_{\alpha\beta}) = \mathcal{D}((-g)^k A_{\alpha\beta}), \quad k = \frac{n-4}{4n}
\end{aligned} \tag{B.2.7}$$

のように，一般座標変換（およびそれに伴う BRST 変換）に関して不変な測度が定義される．この測度の定義式で 2 種類測度が与えられている場合は，後の方の定義は，一度 4 脚場をヤコビアンとしてとりだしそれを改めてすべての自由度に等分配して定義してある．この後者の定義は，厳密とは言えないが，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ などに対しては 4 脚場を掛けて Minkowski の足を持たない場に変換するというトリックは適用できないための次善の策である．また，本文中での応用を考えて，テンソル場 $A^{\alpha\beta}$ とか $A_{\alpha\beta}$ には，任意の $n$ 次元の時空間での定義式を与えてある．

このようにして，一般座標変換に関する BRST 不変な測度は

$$d\mu = d\mu(g^{\alpha\beta})\mathcal{D}((-g)^{1/4}e^a_\mu c^\mu)\mathcal{D}\bar{c}_\mu\mathcal{D}B_\mu\mathcal{D}\bar{\tilde{\psi}}\mathcal{D}\tilde{\psi} \tag{B.2.8}$$

で与えられる．ここで計量に関する部分はすでに議論したように $d\mu(g^{\alpha\beta}) = \mathcal{D}((-g)^k g^{\alpha\beta})$ で与えられる．ゴースト場も，微分をとると反変ベクトルになるという性質を用いて変数 $\tilde{c}^\mu = (-g)^{1/4}e^a_\mu c^\mu$ が決められた．この測度で自明でない部分 $d\mu(g^{\alpha\beta})\mathcal{D}\tilde{c}^\mu$ の BRST 不変性は，BRST 変換したものがもとの式に一致することを示すことにより理解される．

$$\begin{aligned}
&d\mu(g^{\alpha\beta}(x,\theta))\mathcal{D}\tilde{c}^\mu(x,\theta) \\
&= d\mu(g^{\alpha\beta}(x,\theta)) \det [(-g(x,\theta))^{1/4}e^a_\mu(x,\theta)]^{-1}\mathcal{D}c^\mu(x,\theta) \\
&= d\mu(g^{\alpha\beta}(x)) \det [(-g(x,\theta))^{1/4}e^a_\mu(x,\theta)]^{-1}\mathcal{D}c^\mu(x,\theta) \\
&= d\mu(g^{\alpha\beta}(x))\mathcal{D}[(-g)^{1/4}e^a_\mu c^\mu]
\end{aligned} \tag{B.2.9}$$

すなわち，まず $c^\mu$ を固定すると計量の測度は不変になり $g^{\alpha\beta}(x,\theta)$ において $\theta = 0$ とできる．次に，計量を固定するとヤコビアン，$\det [(-g(x,\theta))^{1/4}e^a_\mu(x,\theta)]^{-1}$,

は一般の(Fermi 的な)反変ベクトルを不変にするものになるので，$\mathcal{D}c^{\mu}(x,\theta)$ と組み合わせて BRST 不変になり，$\theta=0$ とできる．このように重力場の経路積分の測度の重要な点は，計量とゴースト場をいつも一緒にして考える必要があることである．

# C 文献解題

ここでは，本書の記述に関係した主要な文献を簡単な説明をつけて紹介したい．同時に，本書でカバーできなかった量子異常の重要な応用とか基礎的な項目の簡単な説明を加えたい．

## C.1 くり込み理論の誕生と対称性の量子的破れの発見

現代的な場の理論(くり込み理論)の基礎的な文献に関しては

[1.1] J. Schwinger, *Quantum Electrodynamics* (Dover, 1958).

に詳しい．朝永の Oppenheimer への手紙は

[1.2] S. Tomonaga, *Phys. Rev.* **74**(1948) 224.

量子異常の幕開けとなった中性 $\pi$ 中間子の 2 つの光子への崩壊の計算は

[1.3] H. Fukuda and Y. Miyamoto, *Prog. Theor. Phys.* **4**(1949) 49.

この計算の精密化は

[1.4] H. Fukuda, Y. Miyamoto, T. Miyajima, S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **4**(1949) 385; H. Fukuda, Y. Miyamoto, T. Miyajima, S. Tomonaga, S. Oneda and S. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **4**(1949) 477.

[1.5] J. Steinberger, *Phys. Rev.* **76**(1949) 1180.

[1.6] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**(1951) 664.

Pauli–Villars の正則化は

[1.7] W. Pauli and F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21**(1949) 434.

4 元運動量が 0 に近いソフトな $\pi$ 中間子の崩壊の分析が現代的な意味での量子異常の定式化に導いた．

[1.8] J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cim.* **60A**(1969) 47.

[1.9] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177**(1969) 2426.

## C.2 Feynman 経路積分と Schwinger の作用原理

Dirac の古典的な論文は

[2.1] P. A. M. Dirac, *Phys. Zeit. Sow.* **3**(1933) 64.

Feynman の経路積分に関しては，例えば，

[2.2] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**(1948) 267; *Phys. Rev.* **80**(1950) 440.

その他の関連論文は上記[1.1]に詳しい．Schwinger の作用原理は上記[1.1]に採録されているが，例えば

[2.3] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **91**(1953) 713.

作用原理のわかりやすい解説は

[2.4] C. S. Lam, *Nuovo Cim.* **38**(1965) 1755.

Fermi 粒子の経路積分に関しては

[2.5] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, 1966).

日本語の解説としては

[2.6] 大貫義郎，鈴木増雄，柏太郎：経路積分の方法(岩波書店，1992).

[2.7] M. S. スワンソン(青山秀明，川村浩之，和田信也共訳)：経路積分法(吉岡書店，1996).

## C.3 光の量子論と位相演算子

電磁場の量子化は

[3.1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. of London*, **A114**(1927) 243.

において明確に定式化され，また光の位相演算子という概念も導入された．ゲージ場の経路積分による定式化は

[3.2] L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**(1967) 29.

において与えられた．BRST 対称性と呼ばれるものは，次の論文で導入され，

また有用性が示された.

[3.3]　C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42**(1975) 127.

[3.4]　J. Zinn-Justin, *Lecture Notes in Physics*, **37** (Springer-Verlag, Berlin, 1975) 2.

BRST 対称性のレビューとしては，例えば

[3.5]　N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (World Scientific, 1990).

光のエルミートな位相演算子の構成の試みは(過去のこの分野の文献も含めて)

[3.6]　D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev.* **A39**(1989) 1665.

光(および調和振動子)の位相演算子と指数定理の関係は次の論文で議論された

[3.7]　K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **A52**(1995) 3299.

## C.4　場の理論の正則化とカイラル対称性の量子的破れ

標準的なゲージ場理論の復習と記法は本書の付録 A で与えられているが，ここでは関連した教科書を挙げておく.

[4.1]　J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, 1965).

[4.2]　K. Nishijima, *Fields and Particles* (Benjamin, 1969).

[4.3]　N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3rd edition (John Wiley, 1980).

[4.4]　J. C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions* (Cambridge Univ. Press, 1976).

[4.5]　L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, *Gauge Fields* (Benjamin/ Cummings, 1980).

[4.6]　P. Ramond, *Field Theory–A Modern Primer* (Addison-Wesley, 1989).

[4.7]　M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995).

[4.8] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, I and II* (Cambridge Univ. Press, 1995).

日本語の教科書としては

[4.9] 西島和彦，場の理論(紀伊國屋書店，1987).

[4.10] 九後汰一郎，ゲージ場の量子論 I，II (培風館，1989).

[4.11] 藤川和男，ゲージ場の理論(岩波書店，1993).

本書の記法は，主として上の参考書[4.1]にならっている．

さて，第 4 章の内容に関しては，まず高階微分正則化は文献[4.5]に詳しい．第 4 章の具体的な記述，特にカレントの共変的な正則化は，

[4.12] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D29**(1984) 285.

[4.13] K. Fujikawa. *Nucl. Phys.* **B428**(1994) 169.

に沿っている．通常の摂動計算では次元正則化

[4.14] G.'t Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**(1972) 189.

[4.15] C. G. Bollini and J. J. Gianbiagi, *Nuovo Cim.* **B12**(1972) 85.

がよく使われるが，量子異常の計算にはこの正則化は見通しがよくない．3 角形の Feynman 図の計算は C.1 に挙げた文献，特に[1.8]，[1.9]に詳しい．Adler-Bardeen の定理に関しては

[4.16] S. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **182**(1969) 1517.

[4.17] A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **29**(1972) 1198.

[4.18] K. Higashijima, K. Nishijima and M. Okawa, *Prog. Theor. Phys.* **67** (1982) 668.

## C.5 経路積分のヤコビアンと対称性の量子的破れ

第 5 章は，第 1 章で述べた Feynman 図の分析に基づく量子異常の古典的な計算の経路積分の立場からの再定式化である．この手法は

[5.1] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42**(1979) 1195.

[5.2] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D21**(1980) 2848; **D22**(1980) 1499(E).

で与えられた．

Atiyah-Singer の指数定理の物理的な手法に近い証明は

[5.3]　M. Atiyah, R. Bott, and V. Patodi, *Invent. Math.* **19**(1973) 279.

平坦な 4 次元 Euclid 空間でのこの定理の内容の具体的な分析は

[5.4]　R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D16**(1977) 1052.

で与えられた．本書の指数定理の証明および議論はこれら 2 つの文献にしたがっている．

インスタントン解は

[5.5]　A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwarz and Yu. S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **59B**(1975) 85.

で発見された．この解の物理的な内容は

[5.6]　G.'t Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**(1976) 8.

[5.7]　G.'t Hooft, *Phys. Rev.* **D14**(1976) 3432.

[5.8]　R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37**(1976) 172.

[5.9]　C. G. Callan, R. F. Dashen and D. J. Gross, *Phys. Lett.* **63B**(1976) 334.

で明らかにされた．文献[5.7]は $U(1)$ 問題と呼ばれる $\eta'$ に関係した問題を Nambu–Goldstone 定理と量子異常の競合として理解し，文献[5.8]，[5.9]は $\theta$ 真空という概念を導入した．

## C.6　ゲージ対称性の量子的破れ

ゲージ対称性の量子的な破れは最初に Pauli–Villars 正則化を用いて

[6.1]　W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* **184**(1969) 1848.

において計算された．その他の計算は

[6.2]　R. W. Brown, C. C. Shik and B. L. Young, *Phys. Rev.* **186**(1969) 1491.

[6.3]　A. P. Balachandran, G. Marmo, V. P. Nair and C. G. Trahern, *Phys. Rev.* **D25**(1982) 2713.

経路積分法では，まず文献[5.2]で計算されたが，積分可能な形の計算に関しては

[6.4]　M. B. Einhorn and D. R. T. Jones, *Phys. Rev.* **D29**(1984) 331.

[6.5]　A. Andrianov and L. Bonora, *Nucl. Phys.* **B233**(1984) 232.

文献[6.5]はゲージ場の虚数への回転を最初に議論した．経路積分の Pauli–Villars

正則化は文献[5.2]で議論された．

ゲージ理論(特に Weinberg-Salam 理論)での量子異常の相殺に関しては

[6.6]　C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer, *Phys. Lett.* **38B**(1972) 519.

[6.7]　D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6**(1972) 477.

本書での量子異常を含むゲージ理論の困難の分析は

[6.8]　K. Fujikawa, *Phys. Lett.* **171B**(1986) 424.

にならったが，Gauss の演算子の代数に基づく議論は

[6.9]　L. D. Faddeev, *Phys. Lett.* **145B**(1984) 81.

[6.10]　S. G. Jo, *Nucl. Phys.* **B259**(1985) 616.

[6.11]　M. Kobayashi, K. Seo and A. Sugamoto, *Nucl. Phys.* **B273**(1986) 607.

なお，量子異常を含む理論を量子化しようという試みもあり，例えば，

[6.12]　L. D. Faddeev and S. L. Shatashvili, *Phys. Lett.* **167B**(1986) 225.

[6.13]　R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54**(1985) 1219; 2026(E).

[6.14]　E. D'Hoker and E. Farhi, *Nucl. Phys.* **B248**(1984) 59.

[6.15]　K. Harada and I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **183B**(1987) 311.

[6.16]　O. Babelon, F. A. Schaposnik and C. M. Viallet, *Phys. Lett.* **177B**(1986) 385.

共変的な量子異常の計算法は文献[5.2]および

[6.17]　K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D29**(1984) 285.

に詳しい．カイラルゲージ理論での Fermi 粒子数の非保存は

[6.18]　G.'t Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**(1976) 8.

で指摘された．

共変的な量子異常と積分可能な量子異常の関係は

[6.19]　J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* **37B**(1971) 95.

[6.20]　W. A. Bardeen and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B244**(1984) 421.

に詳しい．特に文献[6.19]は Wess-Zumino 条件および Wess-Zumino 項を導入した．本書で議論した共変的な量子異常を積分可能な量子異常に変換する方法は

[6.21]　H. Banerjee, R. Banerjee and P. Mitra, *Z. Phys.* **C32**(1986) 445.

にならった．本書で議論しなかったより数学的な微分幾何的な手法(cohomology)

は重要であり，文献[6.20]および次の文献を参照されたい．

[6.22]　B. Zumino, in *Relativity, Groups and Topology II*, eds. B. S. DeWitt and R. Stora (North Holland, 1984) p. 1291.

[6.23]　R. Stora, in *Progress in Gauge Field Theory*, eds. H. Lehman et al., NATO ASI Series B, Physics, **115**(Plenum, 1984) p.543.

[6.24]　B. Zumino, Y. S. Wu and A. Zee, *Nucl. Phys.* **B239**(1984) 477.

[6.25]　L. Alvarez–Gaume and P. Ginsparg, *Nucl. Phys.* **B234**(1984) 449.

カイラル有効理論での Wess–Zumino 項の考察に関しては文献[6.19]に加えて

[6.26]　E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**(1983) 422.

[6.27]　E. Witten, *Nucl. Phys.* **B223**(1983) 433.

[6.28]　K. C. Chou, H. Y. Guo, K. Wu and X. C. Song, *Phys. Lett.* **134B**(1984) 67.

[6.29]　H. Kawai and S–H. H. Tye, *Phys. Lett.* **140B**(1984) 403.

一般化された Pauli–Villars 正則化に関しては

[6.30]　S. A. Frolov and A. A. Slavnov, *Phys. Lett.* **309B**(1993) 344.

[6.31]　R. Narayanan and H. Neuberger, *Phys. Lett.* **301B**(1993) 62.

このスキームでの Fermi 粒子数の量子異常の計算は

[6.32]　S. Aoki and Y. Kikukawa, *Mod. Phys. Lett.* **A8**(1993) 3517.

[6.33]　K. Fujikawa, *Nucl. Phys.* **B428**(1994) 169.

この最後の文献では，一般化された Pauli–Villars 正則化を共変的なカレントの正則化の観点から議論し，本書の扱いもそれにならった．

後藤–今村–Schwinger 項は

[6.34]　T. Goto and I. Imamura, *Prog. Theor. Phys.* **14**(1955) 196.

[6.35]　J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.* **3**(1959) 296.

で指摘された．本書で議論した 4 次元の量子電磁力学での Gauss の演算子におけるこの項の相殺は

[6.36]　K. Fujikawa, *Phys. Lett.* **188B**(1987) 115.

での議論にしたがった．第 10 章の Kac–Moody 代数に関係した 2 次元の理論では，量子異常と後藤–今村–Schwinger 項の区別は明確ではなくなる．

量子異常を出さないゲージ群とか表現に関しては

[6.37] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* **D6**(1972) 429.

## C.7 Weyl 対称性の量子的破れとくり込み群

場の理論におけるスケール変換の分かりやすい議論は

[7.1] S. Coleman and R. Jackiw, *Ann. Phys.* **67**(1971) 552.

Weyl(あるいは共形またはトレース)量子異常の初期の議論は

[7.2] R. J. Crewther, *Phys. Rev. Lett.* **28**(1972) 1421.

[7.3] M. Chanowitz and J. Ellis, *Phys. Lett.* **40B**(1972) 397.

Weyl 量子異常の経路積分による定式化は

[7.4] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **44**(1980) 1733.

[7.5] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D23**(1981) 2262.

で与えられた．本書の記述は[7.5]に主としてよっている．また本書の「改良された」エネルギー運動量テンソルもこの文献で与えられた．

ゲージ理論での Weyl 量子異常のくり込みの詳細は

[7.6] S. L. Adler, J. C. Collins and A. Duncan, *Phys. Rev.* **D15**(1977) 1712.

[7.7] N. K. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B120**(1977) 212.

本書の $\beta$ 関数の計算は

[7.8] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D48**(1993) 3922.

によっているが，この計算は次の文献の手法に近い．

[7.9] G.'t Hooft, *Nucl. Phys.* **B62**(1973) 444.

背景場の方法に関しては，過去の文献も含めて

[7.10] S. Ichinose and M. Omote, *Nucl. Phys.* **B203**(1982) 221.

なお，QCD での $\beta$ 関数の計算は

[7.11] D. Gross and F. Wilczeck, *Phys. Rev. Lett.* **30**(1973) 1343.

[7.12] Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**(1973) 1346.

で与えられた．Callan-Symanzik 方程式および本書で用いたくり込み群の方程式は

[7.13] C. G. Callan, *Phys. Rev.* **D2**(1970) 1541.

[7.14]　K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **18**(1970) 18.

[7.15]　G.'t Hooft, *Nucl. Phys.* **B61**(1973) 455.

[7.16]　S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D8**(1973) 3497.

曲がった空間での Weyl 量子異常の計算は

[7.17]　S. Deser, M. J. Duff and C. J. Isham, *Nucl. Phys.* **B111**(1976) 45.

[7.18]　L. S. Brown and J. P. Cassidy, *Phys. Rev.* **D15**(1977) 2810.

[7.19]　S. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **55**(1977) 133.

[7.20]　R. Endo, *Prog. Theor. Phys.* **71**(1984) 1366.

この最後の文献では熱核法も学べる．

超対称性における Weyl 量子異常に関係した小西量子異常に関しては

[7.21]　T. E. Clark, O. Piguet and K. Sibold, *Nucl. Phys.* **B159**(1979) 1.

[7.22]　K. Konishi, *Phys. Lett.* **135B**(1984) 439.

[7.23]　K. Konishi and K. Shizuya, *Nuovo Cim.* **90A**(1985) 111.

この最後の文献は超空間での経路積分法を与えている．最近の議論に関しては，例えば，

[7.24]　N. Arkani-Hamed and H. Murayama, *JHEP* **0006**(2000) 030.

## C.8　重力量子異常と一般座標変換の量子的破れ

重力を含むカイラル $U(1)$ 量子異常の計算は

[8.1]　T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **42**(1969) 1191.

[8.2]　R. Delbourgo and A. Salam, *Phys. Lett.* **40B**(1972) 381.

[8.3]　T. Eguchi and P. Freund, *Phys. Rev. Lett.* **37**(1976) 1251.

で与えられた．文献[8.1]の Appendix には曲がった空間の計算の基礎的な知識が簡潔にまとめられている．スピン 3/2 の粒子への一般化は

[8.4]　N. K. Nielsen, M. T. Grisaru, H. Romer and P. Van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B140**(1978) 477.

[8.5]　R. Endo and T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.* **63**(1980) 683.

[8.6]　R. Endo and M. Takao, *Phys. Lett.* **161B**(1985) 155.

重力理論に関係した位相的な性質の詳しい解説は

[8.7]　T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **C66**(1980) 213.

またAtiyah–Singerの指数定理の超対称量子力学を用いた分析としては

[8.8]　L. Alvarez–Gaume, *J. Phys.* **A16**(1983) 4177.

本書の任意の偶数次元での計算法は

[8.9]　K. Fujikawa, S. Ojima and S. Yajima, *Phys. Rev.* **D34**(1986) 3223.

にならったが，この方法は文献[8.8]の方法を超対称性を用いないように簡略化したものである．

一般座標変換および局所Lorentz変換の量子的破れは

[8.10]　L. Alvarez–Gaume and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**(1983) 269.

で定式化され詳細に分析された．関連した初期の研究としては

[8.11]　L. Alvarez–Gaume and P. Ginsparg, *Ann. Phys.* **16**(1985) 423.

[8.12]　L. N. Chang and N. T. Nieh, *Phys. Rev. Lett.* **53**(1984) 21.

[8.13]　S. Yajima and T. Kimura, *Phys. Lett.* **173B**(1986) 154.

および文献[6.20]，[8.6]を参照．一般座標変換と局所Lorentzの量子異常の間の簡単な関係は

[8.14]　K. Fujikawa, M. Tomita and O. Yasuda, *Z. Phys.* **C28**(1986) 154.

で議論された．

## C.9　格子ゲージ理論における指数定理とカイラル量子異常

格子ゲージ理論における初期のFermi粒子の扱いに関しては

[9.1]　L. Karsten and J. Smit, *Nucl. Phys.* **B183**(1981) 103.

[9.2]　H. B. Nielsen and M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B185**(1981) 20.

[9.3]　N. Kawamoto and J. Smit, *Nucl. Phys.* **B192**(1981) 100.

[9.4]　E. Seiler and I. Stamatescu, *Phys. Rev.* **D25**(1982) 2177.

最近の進展は次の論文

[9.5]　P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D25**(1982) 2649.

で提案された関係式および具体的な(歴史的な理由で)overlap演算子と呼ばれる解の構成

[9.6]　H. Neuberger, *Phys. Lett.* **B417**(1998) 141; **B427**(1998) 353.
に基づき，格子上の指数定理の提唱
[9.7]　P. Hasenfratz, V. Laliena and F. Niedermayer, *Phys. Lett.* **B427**(1998) 125.
と，格子理論の経路積分のヤコビアンとしての量子異常の定式化
[9.8]　M. Lüscher, *Phys. Lett.* **B428**(1998) 342.
により始まった．この発展のレビューとしては，例えば
[9.9]　F. Niedermayer, Nucl. Phys. *Proc. Suppl.* **73**(1999) 105.

詳細な量子異常の計算は，例えば，
[9.10]　Y. Kikukawa and A. Yamada, *Phys. Lett.* **B448**(1999) 265.
[9.11]　D. H. Adams, *hep-lat*/9812003.
[9.12]　H. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **102**(1999) 141.
[9.13]　K. Fujikawa, *Nucl. Phys.* **B546**(1999) 480.
で行われた．

本書で議論した少し一般化した Ginsparg-Wilson の代数関係およびその表現論と指数定理の証明は
[9.14]　K. Fujikawa, *Nucl. Phys.* **B589**(2000) 487.
に基づく．一般化された Ginsparg-Wilson 型の演算子での量子異常の具体的な計算は
[9.15]　K. Fujikawa and M. Ishibashi, *Nucl. Phys.* **B587**(2000) 419.
文献[9.6]の演算子の局所性の具体的な証明に関しては
[9.16]　P. Hernandez, K. Jansen and M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B552**(1999) 363.
[9.17]　H. Neuberger, *Phys. Rev.* **D61**(2000) 085015.
overlap 演算子に現われる余分な重い位相的な粒子 ($N_{\pm}$) の役割に関しては
[9.18]　T. W. Chiu, *Phys. Rev.* **D58**(1998) 074511.
[9.19]　S. Chandrasekharan, *Phys. Rev.* **D60**(1999) 074503.

カイラルな Fermi 粒子の定式化は現在も進行中といえるが
[9.20]　M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B549**(1999) 295.
[9.21]　H. Neuberger, *Phys. Rev.* **D59**(1999) 085006.
[9.22]　H. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **101**(1999) 1147.

[9.23] M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B568**(2000) 162; *JHEP* **06**(2000) 028.

[9.24] H. Suzuki, *Nucl. Phys.* **B585**(2000) 471.

[9.25] Y. Kikukawa and Y. Nakayama, *hep-lat*/0005015.

などが参考になる．つぎの文献の非可換幾何的な手法もおもしろい．

[9.26] T. Fujiwara, H. Suzuki and K. Wu, *Nucl. Phys.* **B569**(2000) 643.

## C.10 2次元の場の理論とボソン化

2次元の理論の Fermi 粒子のボソン化は

[10.1] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**(1975) 2088.

により明確に定式化されたが，本書で扱った形の経路積分によるボソン化の基本的な考えは

[10.2] R. Roskies and F. A. Schaposnik, *Phys. Rev.* **D23**(1981) 558.

[10.3] R. E. Gamboa-Savari, F. A. Schaposnik and J. Solomin, *Nucl. Phys.* **B185**(1981) 239.

[10.4] K. Furuya, R. E. Gamboa-Savari and F. A. Schaposnik, *Nucl. Phys.* **B208**(1982) 159.

により発展させられた．本書の記述は瀬尾幸市氏の(unpublished)ノートを参考にした．非 Abel 的なボソン化のエレガントな定式化は異なる手法で

[10.5] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **92**(1984) 455.

において与えられた．

ボソン化に関する文献は非常に多いが，次の関連した文献を挙げるに留める．

[10.6] A. M. Polyakov and P. Wiegman, *Phys. Lett.* **131B**(1983) 121; **141B** (1984) 223.

[10.7] D. Gonzales and A. N. Redlich, *Phys. Lett.* **147B**(1984) 150.

[10.8] P. di Vechia and P. Rossi, *Phys. Lett.* **140B**(1984) 344.

[10.9] C. M. Naon, *Phys. Rev.* **D31**(1985) 2035.

[10.10] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla and K. D. Rothe, *Non-perturbative methods in two-dimensional quantum field theory* (World Scientific, 1991).

共形場の理論も文献が膨大であるが，例えば，次のレビューを参照されたい

[10.11]　P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, in Proc. of Les Houche Summer School (1988).

本書の量子異常と無限次元代数の中心拡大の関係の議論は文献[6.36]に近い．物性物理への応用に関しては本シリーズに次のよく書けた解説がある

[10.12]　川上則雄，梁成吉，共形場理論と 1 次元量子系(岩波書店，1997).

2 次元理論での一般座標変換あるいは Weyl 変換に関して不変なエネルギー運動量テンソルの定義とその量子異常に関しては

[10.13]　K. Fujikawa, U. Lindstrom, N. K. Nielsen, M. Rocek and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.* **D37**(1988) 391.

BJL の処方に関しては

[10.14]　J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **148**(1966) 1467.

[10.15]　K. Johnson and F. E. Low, *Prog. Theor. Phys. Supp.* **37-38**(1966) 74.

弦の経路積分による第 1 量子化のごく基礎的な側面の文献としては

[10.16]　A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **103B**(1981) 207.

[10.17]　K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D25**(1982) 2584.

[10.18]　O. Alvarez, *Nucl. Phys.* **B216**(1983) 125.

[10.19]　D. Friedan, S. Shenker and P. Martinec, *Nucl. Phys.* **B271**(1986) 93.

本書の扱いは文献[10.17]によっている．[10.17]で初めて BRST 形式が弦理論に導入され同時に Faddeev-Popov のゴースト数に量子異常があることが見つけられた．この異常は Riemann-Roch の定理の場の理論的な表現であることは文献[10.19]参照．ちなみに文献[10.17]の経路積分は本書の付録 B の処方によっているが，この詳細は

[10.20]　K. Fujikawa, *Nucl. Phys.* **B226**(1983) 437.

で与えられている．弦の経路積分のもう少し進んだ計算としては例えば，

[10.21]　A. Eastaugh, L. Mezincescu, E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. Lett.* **57**(1986) 29.

## C.11　おわりに

第 11 章での “不確定性関係” と類似の議論は文献[5.2]，[7.4]に基づいている．

本書では詳細は議論しなかった大局的な $SU(2)$ 量子異常に関しての基礎的な文献は

[11.1] E. Witten, *Phys. Lett.* **117B**(1982) 324.

[11.2] S. Elitzur and V. P. Nair, *Nucl. Phys.* **B**243(1984) 205.

[11.3] L. Alvarez-Gaume, S. Della Pietra, and V. Della Pietra, *Phys. Lett.* **166B**(1986) 176.

[11.4] R. A. Baadhio, *Quantum Topology and Global anomalies* (World Scientific, 1996).

本書では議論しなかった弦理論での Green-Schwarz 機構は

[11.5] M. G. Green and J. H. Schwarz, *Phys. Lett.* **149B**(1984) 117.

[11.6] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. Martinec and R. Rohm, *Nucl. Phys.* **B256** (1985) 253.

弦理論での直接の量子異常の計算としては，例えば，

[11.7] H. Suzuki and A. Sugamoto, *Phys. Rev. Lett.* **57**(1986) 1665.

[11.8] K. Pilch, A. N. Schellekens and N. P. Warner, *Nucl. Phys.* **B287**(1987) 362.

弦理論の詳細な参考文献に関しては

[11.9] M. G. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory I, II* (Cambridge Univ. Press, 1987).

[11.10] 吉川圭二，弦の量子論(朝倉書店，1991).

[11.11] J. Polchinski, *String Theory I, II* (Cambridge Univ. Press, 1998).

超対称性の量子異常の文献も膨大である．文献のごく一部になるが

[11.12] S. Ferrara and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B87**(1975) 207.

[11.13] T. E. Clark, O. Piguet and K. Sibold, *Nucl. Phys.* **B143**(1978) 445.

[11.14] M. T. Grisaru and P. C. West, *Nucl. Phys.* **B254**(1985) 249.

[11.15] H. Suzuki, *Phys. Rev. Lett.* **56**(1986) 1534.

[11.16] N. K. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B244**(1984) 499.

[11.17] K. Harada and K. Shizuya, *Phys. Lett.* **162B**(1985) 322.

最近の分析(および文献)に関しては，例えば，

[11.18] Y. Ohshima, K. Okuyama, H. Suzuki and H. Yasuta, *Phys. Lett.* **457B**

(1999) 291.

超対称性の教科書としては

[11.19]　J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergraviry* (Princeton Univ. Press, 1983).

[11.20]　S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, III* (Cambridge Univ. Press, 2000).

その他の量子異常の応用としては，'t Hooft による量子異常の一致の条件と呼ばれる質量 0 の複合粒子に対する制約

[11.21]　't Hooft, in *Recent Developments in Gauge Theories*, eds. G.'t Hooft et al., (Plenum, 1980) p.135.

[11.22]　Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks and S. Yankielowicz, *Nucl. Phys.* **B177**(1981) 157.

[11.23]　S. Coleman and B. Grossman, *Nucl. Phys.* **B203**(1982) 205.

や，物性系での関連した現象への応用

[11.24]　K. Ishikawa, *Phys. Rev. Lett.* **53**(1984) 1615.

[11.25]　R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D29**(1984) 2375.

[11.26]　Zhao-bin Su and B. Sakita, *Phys. Rev. Lett.* **56**(1986) 780.

などがある．

最後になるが，量子異常のレビューとしては，

[11.27]　S. L. Adler, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, eds. S. Deser et al., (MIT Press, 1970).

[11.28]　S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino and E. Witten, *Current Algebra and Anomalies* (World Scientific, 1985).

[11.29]　R. Bertlemann, *Anomalies in Quantum Field Theory* (Oxford Univ. Press, 1996).

これらのレビューから本書とは相補的な見方を学ぶことができる．

# 索　引

## K



## L



## M



## N



## O



## P

藤川和男（ふじかわ かずお）

1942 年生まれ
1965 年東京大学理学部物理学科卒業
現在　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻教授
専攻　場の理論

経路積分と対称性の量子的破れ　　新物理学選書

2001 年 2 月 23 日　第 1 刷発行

著　者　藤川和男（ふじかわかずお）

発行者　大塚信一

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電　話　案内 03-5210-4000
http: // www. iwanami. co. jp/

印刷：法令印刷　表紙印刷：NPC　製本：松岳社


ISBN 4-00-007415-6　　Printed in Japan